

INTRODUÇÃO À ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS E MODELOS PARA INTERAÇÃO POPULACIONAL

Eleomar Cardoso Júnior

III SEMAT

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

As derivadas determinam um conceito matemático com grande aplicabilidade nas ciências em geral. Através das derivadas, podem ser estabelecidas taxas que descrevem situações da física, da química, da economia, da biologia e de diversos outros campos do saber.

As derivadas determinam um conceito matemático com grande aplicabilidade nas ciências em geral. Através das derivadas, podem ser estabelecidas taxas que descrevem situações da física, da química, da economia, da biologia e de diversos outros campos do saber.

De maneira geral, uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

As derivadas determinam um conceito matemático com grande aplicabilidade nas ciências em geral. Através das derivadas, podem ser estabelecidas taxas que descrevem situações da física, da química, da economia, da biologia e de diversos outros campos do saber.

De maneira geral, uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

As equações diferenciais, desta maneira, são equações onde as “incógnitas” a serem deduzidas, são funções.

As derivadas determinam um conceito matemático com grande aplicabilidade nas ciências em geral. Através das derivadas, podem ser estabelecidas taxas que descrevem situações da física, da química, da economia, da biologia e de diversos outros campos do saber.

De maneira geral, uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

As equações diferenciais, desta maneira, são equações onde as “incógnitas” a serem deduzidas, são funções.

Usaremos a teoria das equações diferenciais para deduzir o comportamento de situações que envolvem o estudo de populações.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Consideremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função. A equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

é um exemplo de equação diferencial ordinária.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Consideremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função. A equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

é um exemplo de equação diferencial ordinária.

Solucionar a equação (1) é equivalente a deduzir um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

- $(x, \varphi(x)) \in \Omega, \forall x \in I.$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in I.$

- Seja a equação diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = y.$$

Notemos que

$$y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

é uma solução da equação $y' = y$.

- Seja a equação diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = y.$$

Notemos que

$$y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

é uma solução da equação $y' = y$. SERIA ESTA A ÚNICA SOLUÇÃO?

- Seja a equação diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = y.$$

Notemos que

$$y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

é uma solução da equação $y' = y$. SERIA ESTA A ÚNICA SOLUÇÃO? Na verdade, não.

- Seja a equação diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = y.$$

Notemos que

$$y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

é uma solução da equação $y' = y$. SERIA ESTA A ÚNICA SOLUÇÃO? Na verdade, não. Consideremos que $c \in \mathbb{R}$ seja uma constante qualquer. A função

$$y(x) = ce^x, \forall x \in \mathbb{R},$$

também é uma solução para a referida equação.

- Seja a equação diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = y.$$

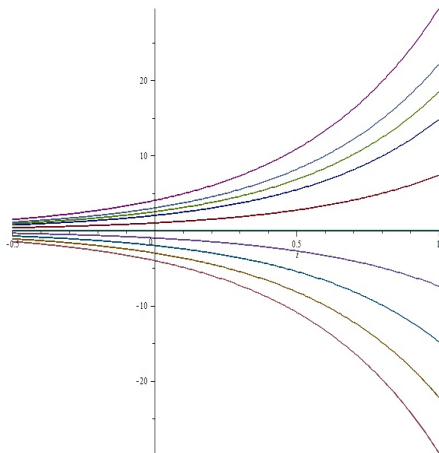
Notemos que

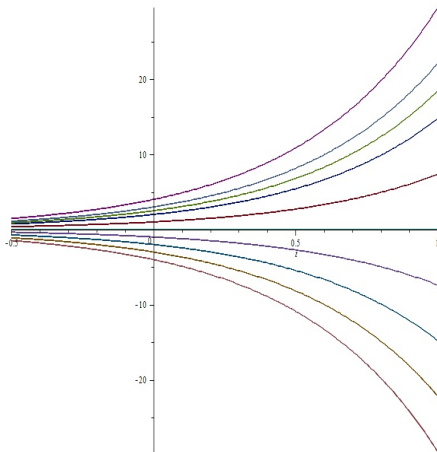
$$y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

é uma solução da equação $y' = y$. SERIA ESTA A ÚNICA SOLUÇÃO? Na verdade, não. Consideremos que $c \in \mathbb{R}$ seja uma constante qualquer. A função

$$y(x) = ce^x, \forall x \in \mathbb{R},$$

também é uma solução para a referida equação. Notemos que uma equação diferencial pode admitir uma infinidade de soluções.





- A equação diferencial $(y')^2 = \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = -1$ não apresenta uma função real como solução.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL - PVI

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Consideremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função. Consideremos que o par $(x_0, y_0) \in \Omega$ esteja fixado. Solucionar a equação diferencial (1),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, é equivalente a deduzir a existência de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

- $(x, \varphi(x)) \in \Omega, \forall x \in I.$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in I.$
- $\varphi(x_0) = y_0.$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

caracteriza um problema de valor inicial (PVI).

Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}. \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

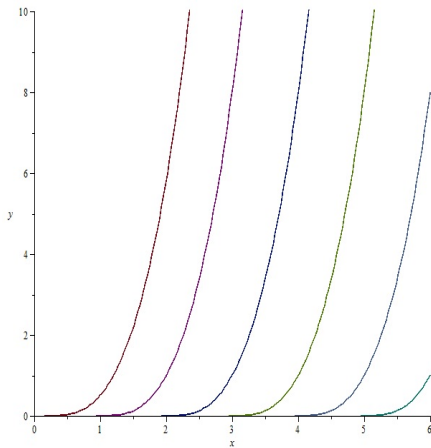
Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}. \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Para cada $c > 0$, a função

$$y(x) = \begin{cases} (x - c)^3, & \text{se } x > c \\ 0, & \text{se } x \leq c \end{cases}$$

soluciona o referido problema de valor inicial.



TEOREMA DE PICARD

Teorema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, um conjunto aberto. Consideremos que $(x_0, y_0) \in \Omega$ seja um par fixado. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que f é contínua sobre Ω e $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua sobre Ω . Então, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução. Isto é, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e existe uma única função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

- $(x, \varphi(x)) \in \Omega, \forall x \in I$.
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in I$.
- $\varphi(x_0) = y_0$.

MODELO MALTHUSIANO

Uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional por meio de derivadas foi proposta pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente a ideia que fundamenta o modelo Malthusiano parte da hipótese de que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população do país naquele instante. Em outras palavras, quanto mais pessoas houver em um instante t , mais pessoas existirão no futuro. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população total no instante t , então, a taxa de crescimento da população será dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma determinada espécie de bactérias, no instante $t \geq 0$ (onde t é tratado na escala de dias). Estudos científicos apontam que, sob condições ideais, a taxa de crescimento da área ocupada pela população de bactérias é determinada por

$$\frac{dP}{dt} = 2P. \quad (2)$$

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma determinada espécie de bactérias, no instante $t \geq 0$ (onde t é tratado na escala de dias). Estudos científicos apontam que, sob condições ideais, a taxa de crescimento da área ocupada pela população de bactérias é determinada por

$$\frac{dP}{dt} = 2P. \quad (2)$$

Sabendo que a população de bactérias, no instante $t = 0$, ocupa uma área de $1mm^2$,

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma determinada espécie de bactérias, no instante $t \geq 0$ (onde t é tratado na escala de dias). Estudos científicos apontam que, sob condições ideais, a taxa de crescimento da área ocupada pela população de bactérias é determinada por

$$\frac{dP}{dt} = 2P. \quad (2)$$

Sabendo que a população de bactérias, no instante $t = 0$, ocupa uma área de $1mm^2$, O QUE ESPERAR DO NÚMERO $P(t)$?

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c}$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c} \Rightarrow |P| = e^{2t} e^c$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c} \Rightarrow |P| = e^{2t}e^c \Rightarrow P = P(t) = Ke^{2t},$$

onde K é uma constante.

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c} \Rightarrow |P| = e^{2t}e^c \Rightarrow P = P(t) = Ke^{2t},$$

onde K é uma constante.

Mas,

$$1 = P(0)$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c} \Rightarrow |P| = e^{2t}e^c \Rightarrow P = P(t) = Ke^{2t},$$

onde K é uma constante.

Mas,

$$1 = P(0) = Ke^{2 \cdot 0}$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c} \Rightarrow |P| = e^{2t}e^c \Rightarrow P = P(t) = Ke^{2t},$$

onde K é uma constante.

Mas,

$$1 = P(0) = Ke^{2 \cdot 0} = K.$$

Se solucionarmos a equação diferencial (2), poderemos compreender o comportamento da área ocupada pela população de bactérias, $P = P(t)$, conforme a variação do tempo t .

$$\frac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 2dt \Rightarrow \ln(|P|) = 2t + c,$$

onde c é uma constante.

$$e^{\ln(|P|)} = e^{2t+c} \Rightarrow |P| = e^{2t}e^c \Rightarrow P = P(t) = Ke^{2t},$$

onde K é uma constante.

Mas,

$$1 = P(0) = Ke^{2 \cdot 0} = K.$$

Logo,

$$P(t) = e^{2t}, \forall t \geq 0,$$

determina o comportamento da área ocupada (em mm^2) pela referida espécie de bactérias no tempo t .

Seja a função

$$P(t) = e^{2t}, \forall t \geq 0.$$

Estabelecemos que:

| Tempo (em dias) | Área Ocupada (em mm^2) |
|-----------------|-------------------------------|
| $t = 0$ | $P(0) = 1$ |
| $t = 1$ | $P(1) = e^2 = 7,389056099$ |
| $t = 2$ | $P(2) = e^4 = 54,59815003$ |
| $t = 3$ | $P(3) = e^6 = 403,4287935$ |
| $t = 4$ | $P(4) = e^8 = 2980,957987$ |
| $t = 5$ | $P(5) = e^{10} = 22026,46579$ |

Notemos que se $t \rightarrow \infty$, então, $P(t) \rightarrow \infty$.

O modelo malthusiano de crescimento populacional foi usado em diversas situações, inclusive, para compreender o crescimento da população humana em diversas regiões do mundo. Durante a colonização dos Estados Unidos, o modelo apontou coerentemente o crescimento da população durante uma “pequena” faixa de tempo. Mas, no tempo como um todo, este modelo é irreal. Não há sentido em aplicá-lo!

O modelo malthusiano de crescimento populacional foi usado em diversas situações, inclusive, para compreender o crescimento da população humana em diversas regiões do mundo. Durante a colonização dos Estados Unidos, o modelo apontou coerentemente o crescimento da população durante uma “pequena” faixa de tempo. Mas, no tempo como um todo, este modelo é irreal. Não há sentido em aplicá-lo!

Na realidade, as populações podem sofrer com doenças, ausência de alimentos, existência de inimigos naturais, algum desastre natural não esperado e outras limitações impostas pelo próprio ambiente.

MODELO LOGÍSTICO

O matemático e biólogo holandês Verhulst, no ano de 1840, propôs um outro modelo que descreve o comportamento populacional de uma espécie hipotética.

MODELO LOGÍSTICO

O matemático e biólogo holandês Verhulst, no ano de 1840, propôs um outro modelo que descreve o comportamento populacional de uma espécie hipotética.

Segundo a proposta de Verhulst, as populações, quando inseridas em um ambiente hipotético, em um primeiro momento, crescem de forma exponencial, até que se estabilizam em um número nas proximidades da **capacidade suporte**, ou seja, quando o ambiente não pode mais atender às necessidades essenciais para o desenvolvimento saudável de seus indivíduos.

MODELO LOGÍSTICO

O matemático e biólogo holandês Verhulst, no ano de 1840, propôs um outro modelo que descreve o comportamento populacional de uma espécie hipotética.

Segundo a proposta de Verhulst, as populações, quando inseridas em um ambiente hipotético, em um primeiro momento, crescem de forma exponencial, até que se estabilizam em um número nas proximidades da **capacidade suporte**, ou seja, quando o ambiente não pode mais atender às necessidades essenciais para o desenvolvimento saudável de seus indivíduos.

Consideremos que $K > 0$ seja a capacidade suporte de um dado ambiente com relação à população de uma certa espécie. É esperado, portanto, que a população aumente em direção a K até que este nível ainda não tenha sido atingido.

Segundo o modelo logístico,

Segundo o modelo logístico,

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$, onde $k > 0$ é uma constante, se P for pequeno com relação à capacidade suporte K .

Segundo o modelo logístico,

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$, onde $k > 0$ é uma constante, se P for pequeno com relação à capacidade suporte K .
- $\frac{dP}{dt} < 0$, se $P > K$.

Segundo o modelo logístico,

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$, onde $k > 0$ é uma constante, se P for pequeno com relação à capacidade suporte K .
- $\frac{dP}{dt} < 0$, se $P > K$.

A equação proposta por Verhulst é dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right) = kP - \frac{kP^2}{K}. \quad (3)$$

Segundo o modelo logístico,

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$, onde $k > 0$ é uma constante, se P for pequeno com relação à capacidade suporte K .
- $\frac{dP}{dt} < 0$, se $P > K$.

A equação proposta por Verhulst é dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right) = kP - \frac{kP^2}{K}. \quad (3)$$

A equação (3) é denominada a **Equação Diferencial Logística**.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.
 $P(t) = 0$ e $P(t) = K$ caracterizam soluções de equilíbrio para a equação logística.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.

$P(t) = 0$ e $P(t) = K$ caracterizam soluções de equilíbrio para a equação logística. Isso ocorre, pois, em ambos os casos a derivada da variável P em relação à variável t equivale a zero.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.

$P(t) = 0$ e $P(t) = K$ caracterizam soluções de equilíbrio para a equação logística. Isso ocorre, pois, em ambos os casos a derivada da variável P em relação à variável t equivale a zero. Explicamos este fato justificando que se a população for nula, ela continuará sendo nula independente do valor de t adotado.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.

$P(t) = 0$ e $P(t) = K$ caracterizam soluções de equilíbrio para a equação logística. Isso ocorre, pois, em ambos os casos a derivada da variável P em relação à variável t equivale a zero. Explicamos este fato justificando que se a população for nula, ela continuará sendo nula indiferente do valor de t adotado. Além disso, se a população estiver na capacidade suporte, ali permanecerá, pois, a taxa de crescimento ou decrescimento será nula também.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.

$P(t) = 0$ e $P(t) = K$ caracterizam soluções de equilíbrio para a equação logística. Isso ocorre, pois, em ambos os casos a derivada da variável P em relação à variável t equivale a zero. Explicamos este fato justificando que se a população for nula, ela continuará sendo nula indiferente do valor de t adotado. Além disto, se a população estiver na capacidade suporte, ali permanecerá, pois, a taxa de crescimento ou decrescimento será nula também.

Se $P(0)$ estiver entre 0 e K , a população aumentará, pois, $\frac{dP}{dt} > 0$.

Quando P for pequeno em relação a K , então, $\frac{P}{K}$ está próxima de 0, fazendo com que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Além disso, se $P > K$, então, $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, caracterizando $\frac{dP}{dt} < 0$.

$P(t) = 0$ e $P(t) = K$ caracterizam soluções de equilíbrio para a equação logística. Isso ocorre, pois, em ambos os casos a derivada da variável P em relação à variável t equivale a zero. Explicamos este fato justificando que se a população for nula, ela continuará sendo nula indiferente do valor de t adotado. Além disto, se a população estiver na capacidade suporte, ali permanecerá, pois, a taxa de crescimento ou decrescimento será nula também.

Se $P(0)$ estiver entre 0 e K , a população aumentará, pois, $\frac{dP}{dt} > 0$. Se a população inicial estiver acima da capacidade suporte ($P > K$), ela diminuirá.

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente.

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt.$$

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt.$$

Mas,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt.$$

Mas,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K - P)}$$

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt.$$

Mas,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}.$$

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k \, dt.$$

Mas,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}.$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = k \, dt$$

A equação diferencial logística de Verhulst pode ser resolvida analiticamente. Segue que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt.$$

Mas,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}.$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = k dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = \int k dt.$$

Temos que

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1$$

Temos que

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1$$

e

$$\int k \, dt = kt + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Temos que

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1$$

e

$$\int k \, dt = kt + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Logo,

$$\ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1 = kt + c_2$$

Temos que

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1$$

e

$$\int k \, dt = kt + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Logo,

$$\ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1 = kt + c_2 \Rightarrow \ln \left(\frac{|K - P|}{|P|} \right) = -kt + c_3,$$

sendo c_3 uma constante real.

Temos que

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1$$

e

$$\int k \, dt = kt + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Logo,

$$\ln(|P|) - \ln(|K - P|) + c_1 = kt + c_2 \Rightarrow \ln \left(\frac{|K - P|}{|P|} \right) = -kt + c_3,$$

sendo c_3 uma constante real.

Assim,

$$\left| \frac{K - P}{P} \right| = \exp \left[\ln \left(\left| \frac{K - P}{P} \right| \right) \right] = e^{-kt + c_3} = c_4 e^{-kt}.$$

Façamos $A = \pm c_4$.

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt}$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt}$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$.

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$. Estabelecemos que

$$P_0 = P(0)$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$. Estabelecemos que

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{1 + Ae^{-k \cdot 0}}$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$. Estabelecemos que

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{1 + Ae^{-k \cdot 0}} = \frac{K}{1 + A}$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$. Estabelecemos que

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{1 + Ae^{-k \cdot 0}} = \frac{K}{1 + A} \Rightarrow 1 + A = \frac{K}{P_0}$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$. Estabelecemos que

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{1 + Ae^{-k \cdot 0}} = \frac{K}{1 + A} \Rightarrow 1 + A = \frac{K}{P_0} \Rightarrow A = \frac{K}{P_0} - 1$$

Façamos $A = \pm c_4$. Isto nos leva a determinar que

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 + Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Finalmente,

$$P = P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Em seguida, suponhamos que $P(0) = P_0 \neq 0$. Estabelecemos que

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{1 + Ae^{-k \cdot 0}} = \frac{K}{1 + A} \Rightarrow 1 + A = \frac{K}{P_0} \Rightarrow A = \frac{K}{P_0} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

Portanto,

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-kt}}$$

é a função que caracteriza o tamanho de $P(t)$ em função do valor de t .

Portanto,

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-kt}}$$

é a função que caracteriza o tamanho de $P(t)$ em função do valor de t .

Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K.$$

Portanto,

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-kt}}$$

é a função que caracteriza o tamanho de $P(t)$ em função do valor de t .

Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K.$$

Essa informação garante que a população se estabiliza na capacidade suporte K com o desenvolver do tempo.

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético.

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

COMO SE COMPORTA A ÁREA OCUPADA PELA POPULAÇÃO, NA VARIAÇÃO DO TEMPO t , SE $P(0) = 1mm^2$?

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

COMO SE COMPORTA A ÁREA OCUPADA PELA POPULAÇÃO, NA VARIAÇÃO DO TEMPO t , SE $P(0) = 1mm^2$?
SE $P(0) = 10mm^2$?

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

COMO SE COMPORTA A ÁREA OCUPADA PELA POPULAÇÃO, NA VARIAÇÃO DO TEMPO t , SE $P(0) = 1mm^2$? SE $P(0) = 10mm^2$? SE $P(0) = 100mm^2$?

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

COMO SE COMPORTA A ÁREA OCUPADA PELA POPULAÇÃO, NA VARIAÇÃO DO TEMPO t , SE $P(0) = 1mm^2$? SE $P(0) = 10mm^2$? SE $P(0) = 100mm^2$? SE $P(0) = 200mm^2$?

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

COMO SE COMPORTA A ÁREA OCUPADA PELA POPULAÇÃO, NA VARIAÇÃO DO TEMPO t , SE $P(0) = 1mm^2$? SE $P(0) = 10mm^2$? SE $P(0) = 100mm^2$? SE $P(0) = 200mm^2$? SE $P(0) = 300mm^2$?

Consideremos que $P(t)$ seja a área ocupada (em mm^2) por uma população de bactérias no tempo t (medido em dias) em um ambiente hipotético. Suponhamos que a capacidade suporte do ambiente seja $K = 200mm^2$ e que a taxa de crescimento da população seja estabelecida pela equação diferencial logística de Verhulst

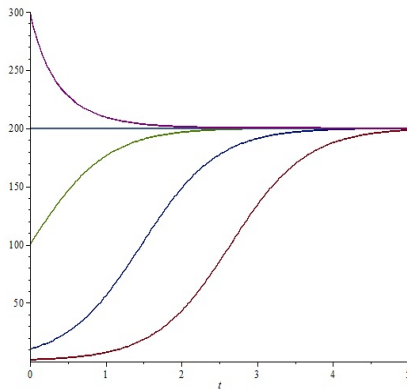
$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{200} \right).$$

COMO SE COMPORTA A ÁREA OCUPADA PELA POPULAÇÃO, NA VARIAÇÃO DO TEMPO t , SE $P(0) = 1mm^2$? SE $P(0) = 10mm^2$? SE $P(0) = 100mm^2$? SE $P(0) = 200mm^2$? SE $P(0) = 300mm^2$?

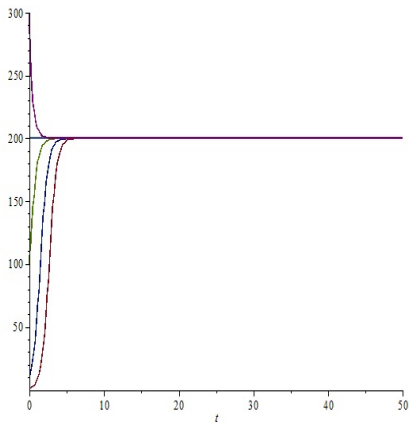
Em todos os casos, a resposta está na função

$$P(t) = \frac{200 \cdot P(0)}{P(0) + (200 - P(0)) \cdot e^{-2t}}.$$

Variação em cinco dias...



Variação em cinquenta dias...



SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem segundo a forma canônica, é um sistema que se apresenta conforme as seguintes configurações

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{4}$$

onde as funções a_{ij} e f_i são funções contínuas em um intervalo comum I .

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem segundo a forma canônica, é um sistema que se apresenta conforme as seguintes configurações

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{4}$$

onde as funções a_{ij} e f_i são funções contínuas em um intervalo comum I .

Se $f_i(t) = 0$, $\forall t \in I$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, o sistema acima apresentado é dito ser homogêneo.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem segundo a forma canônica, é um sistema que se apresenta conforme as seguintes configurações

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{4}$$

onde as funções a_{ij} e f_i são funções contínuas em um intervalo comum I .

Se $f_i(t) = 0$, $\forall t \in I$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, o sistema acima apresentado é dito ser homogêneo. Caso contrário, este é chamado não-homogêneo.

Consideremos as matrizes

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

Consideremos as matrizes

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

Consideremos as matrizes

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Consideremos as matrizes

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

O sistema de equações (4) pode ser interpretado como

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t).$$

Solucionar o sistema

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t),$$

sujeito a

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

onde $x_i^0 \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \mathbb{R}$, significa solucionar um PROBLEMA DE VALOR INICIAL (P.V.I.).

Solucionar o sistema

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t),$$

sujeito a

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

onde $x_i^0 \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \mathbb{R}$, significa solucionar um PROBLEMA DE VALOR INICIAL (P.V.I.).

Teorema

Suponhamos que os elementos das matrizes $A(t)$ e $F(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo I que contenha t_0 . Então, existe uma única solução para o problema de valor inicial, acima descrito, no intervalo dado.

Consideremos, inicialmente, o caso em que $F(t) = \vec{0}$. A equação (5), neste caso, é homogênea.

Consideremos, inicialmente, o caso em que $F(t) = \vec{0}$. A equação (5), neste caso, é homogênea. Além disto,

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t). \quad (6)$$

Consideremos, inicialmente, o caso em que $F(t) = \vec{0}$. A equação (5), neste caso, é homogênea. Além disto,

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t). \quad (6)$$

Daqui em diante, estaremos assumindo que as entradas da matriz $A(t)$ caracterizam uma função contínua.

Consideremos, inicialmente, o caso em que $F(t) = \vec{0}$. A equação (5), neste caso, é homogênea. Além disto,

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t). \quad (6)$$

Daqui em diante, estaremos assumindo que as entradas da matriz $A(t)$ caracterizam uma função contínua.

Teorema

Seja $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ um conjunto de vetores-solução do sistema homogêneo (6) em um intervalo I . Então, a combinação linear

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_k X_k(t),$$

onde cada c_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, é uma constante arbitrária, é também uma solução de (6) no intervalo I .

Definição

Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ um conjunto de vetores-solução do sistema homogêneo (6) em um intervalo I . Dizemos que este conjunto é linearmente dependente no intervalo I se existirem constantes c_1, c_2, \dots, c_k , não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_k X_k(t) = 0,$$

para todo t no intervalo. Se o conjunto não for linearmente dependente no intervalo, dizemos que é linearmente independente.

Definição

Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ um conjunto de vetores-solução do sistema homogêneo (6) em um intervalo I . Dizemos que este conjunto é linearmente dependente no intervalo I se existirem constantes c_1, c_2, \dots, c_k , não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_k X_k(t) = 0,$$

para todo t no intervalo. Se o conjunto não for linearmente dependente no intervalo, dizemos que é linearmente independente.

Definição

Qualquer conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de n vetores linearmente independentes que solucionam o sistema homogêneo (6) em um intervalo I é chamado um conjunto fundamental de soluções no intervalo.

Teorema

Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo (6) no intervalo I .

Teorema

Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo (6) no intervalo I .

Teorema

Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (6) em um intervalo I . Se $X(t)$ for uma solução arbitrária de (6), então, existem constantes reais c_1, c_2, \dots, c_n , tais que

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t).$$

Definição

Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (6) em um intervalo I . Define-se a solução geral do sistema no intervalo como

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t),$$

onde cada c_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é uma constante arbitrária.

Definição

Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (6) em um intervalo I . Define-se a solução geral do sistema no intervalo como

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t),$$

onde cada c_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é uma constante arbitrária.

COMO DETERMINAR UM CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO (6)?

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

onde a_{ij} é uma constante real.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

onde a_{ij} é uma constante real.

Definição

Diz-se que um número λ é um autovalor de A se existir um vetor não-nulo K que solucione o sistema

$$AK = \lambda K.$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

onde a_{ij} é uma constante real.

Definição

Diz-se que um número λ é um autovalor de A se existir um vetor não-nulo K que solucione o sistema

$$AK = \lambda K.$$

O vetor K é chamado autovetor de A associado ao autovalor λ .

Proposição

O número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor da matriz A , se e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

Proposição

O número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor da matriz A , se e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

Teorema

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Suponhamos que A possua n autovalores reais e distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Assumamos que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, K_i seja o autovetor associado ao autovalor λ_i . Então, $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$, para t variando sobre a reta, constitui um conjunto fundamental de soluções para a equação

$$X'(t) = A \cdot X(t),$$

onde $X_i = X_i(t) = e^{\lambda_i t} K_i(t)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos o problema de obter

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

tal que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos o problema de obter

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

tal que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Nesta abordagem, os parâmetros a_{11} , a_{12} , a_{21} e a_{22} são constantes reais.

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2).

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Os vetores $X_1 = X_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ l_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Os vetores $X_1 = X_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ l_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ e

$X_2 = X_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} k_2 e^{\lambda_2 t} \\ l_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Os vetores $X_1 = X_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ l_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ e $X_2 = X_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} k_2 e^{\lambda_2 t} \\ l_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ são soluções linearmente independentes para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Os vetores $X_1 = X_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ l_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ e

$X_2 = X_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} k_2 e^{\lambda_2 t} \\ l_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ são soluções linearmente

independentes para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Desta maneira, $x(t) = c_1[k_1 e^{\lambda_1 t}] + c_2[k_2 e^{\lambda_2 t}]$

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Os vetores $X_1 = X_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ l_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ e

$X_2 = X_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} k_2 e^{\lambda_2 t} \\ l_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ são soluções linearmente

independentes para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Desta maneira, $x(t) = c_1[k_1 e^{\lambda_1 t}] + c_2[k_2 e^{\lambda_2 t}]$ e

$y(t) = c_1[l_1 e^{\lambda_1 t}] + c_2[l_2 e^{\lambda_2 t}]$,

Consideremos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e façamos o estudo dos autovalores da matriz A .

Conhecimentos referentes à Álgebra Linear determinam que quatro casos devem ser considerados.

1º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores reais distintos (λ_1 e λ_2). Neste caso, λ_1 está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ e, λ_2 está associado ao autovetor

$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Os vetores $X_1 = X_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ l_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ e

$X_2 = X_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} k_2 e^{\lambda_2 t} \\ l_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ são soluções linearmente

independentes para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Desta maneira, $x(t) = c_1[k_1 e^{\lambda_1 t}] + c_2[k_2 e^{\lambda_2 t}]$ e

$y(t) = c_1[l_1 e^{\lambda_1 t}] + c_2[l_2 e^{\lambda_2 t}]$, onde c_1 e c_2 são constantes,

determinam a solução geral de $x(t)$ e de $y(t)$.

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ .

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ . Nesta situação, entretanto, havemos de considerar dois casos possíveis:

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ . Nesta situação, entretanto, devemos considerar dois casos possíveis:

- Dado λ autovalor, existem dois autovetores associados a λ , K_1 e K_2 , que são linearmente independentes.

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ . Nesta situação, entretanto, devemos considerar dois casos possíveis:

- Dado λ autovalor, existem dois autovetores associados a λ , K_1 e K_2 , que são linearmente independentes.
- Dado λ autovalor, existe um único autovetor linearmente independente associado a si.

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ . Nesta situação, entretanto, devemos considerar dois casos possíveis:

- Dado λ autovalor, existem dois autovetores associados a λ , K_1 e K_2 , que são linearmente independentes.
- Dado λ autovalor, existe um único autovetor linearmente independente associado a si.

2º caso - A. Suponhamos que K_1 e K_2 sejam os autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ .

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ . Nesta situação, entretanto, devemos considerar dois casos possíveis:

- Dado λ autovalor, existem dois autovetores associados a λ , K_1 e K_2 , que são linearmente independentes.
- Dado λ autovalor, existe um único autovetor linearmente independente associado a si.

2º caso - A. Suponhamos que K_1 e K_2 sejam os autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t}K_1$ e $X_2(t) = e^{\lambda t}K_2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2º caso. Suponhamos que a matriz A admita um único autovalor real: λ . Nesta situação, entretanto, devemos considerar dois casos possíveis:

- Dado λ autovalor, existem dois autovetores associados a λ , K_1 e K_2 , que são linearmente independentes.
- Dado λ autovalor, existe um único autovetor linearmente independente associado a si.

2º caso - A. Suponhamos que K_1 e K_2 sejam os autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t} K_1$ e $X_2(t) = e^{\lambda t} K_2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então, $\{X_1(t), X_2(t)\}$ é um conjunto fundamental de soluções para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$.

2º caso - B. Suponhamos que K seja o único autovetor linearmente independente associado ao autovalor λ .

2º caso - B. Suponhamos que K seja o único autovetor linearmente independente associado ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t} K$.

2º caso - B. Suponhamos que K seja o único autovetor linearmente independente associado ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t} K$. Já $X_1(t)$ é uma solução para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$.

2º caso - B. Suponhamos que K seja o único autovetor linearmente independente associado ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t} K$. Já $X_1(t)$ é uma solução para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$. Mas, por conhecimentos prévios, existe X_2 , linearmente independente a X_1 , tal que X_2 também soluciona a $X'(t) = A \cdot X(t)$.

2º caso - B. Suponhamos que K seja o único autovetor linearmente independente associado ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t} K$. Já $X_1(t)$ é uma solução para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$. Mas, por conhecimentos prévios, existe X_2 , linearmente independente a X_1 , tal que X_2 também soluciona a $X'(t) = A \cdot X(t)$.

Suponhamos que P seja o vetor que soluciona a equação $(A - \lambda I)P = K$.

2º caso - B. Suponhamos que K seja o único autovetor linearmente independente associado ao autovalor λ . Definamos $X_1(t) = e^{\lambda t}K$. Já $X_1(t)$ é uma solução para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$. Mas, por conhecimentos prévios, existe X_2 , linearmente independente a X_1 , tal que X_2 também soluciona a $X'(t) = A \cdot X(t)$.

Suponhamos que P seja o vetor que soluciona a equação $(A - \lambda I)P = K$. É possível determinar que $X_2(t) = Kte^{\lambda t} + Pe^{\lambda t}$ é a solução da referida equação matricial e que $\{X_1(t), X_2(t)\}$ constitui um conjunto fundamental de soluções para esta equação matricial, que é homogênea.

3º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores complexos (que não são números reais): $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\beta \neq 0$.

3º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores complexos (que não são números reais): $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\beta \neq 0$. Nesta situação, determinamos que existe K_1 , um autovetor de A , associado ao autovalor λ_1 .

3º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores complexos (que não são números reais): $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\beta \neq 0$. Nesta situação, determinamos que existe K_1 , um autovetor de A , associado ao autovalor λ_1 . O autovetor associado a λ_2 , será dado por $\overline{K_1}$.

3º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores complexos (que não são números reais): $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\beta \neq 0$. Nesta situação, determinamos que existe K_1 , um autovetor de A , associado ao autovalor λ_1 . O autovetor associado a λ_2 , será dado por $\overline{K_1}$. Em verdade, $\{X_1(t), X_2(t)\}$ constitui um conjunto fundamental de soluções para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, onde

$$X_1(t) = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

3º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores complexos (que não são números reais): $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\beta \neq 0$. Nesta situação, determinamos que existe K_1 , um autovetor de A , associado ao autovalor λ_1 . O autovetor associado a λ_2 , será dado por $\overline{K_1}$. Em verdade, $\{X_1(t), X_2(t)\}$ constitui um conjunto fundamental de soluções para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, onde

$$X_1(t) = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

e

$$X_2(t) = [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}.$$

3º caso. Suponhamos que a matriz A admita dois autovalores complexos (que não são números reais): $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\beta \neq 0$. Nesta situação, determinamos que existe K_1 , um autovetor de A , associado ao autovalor λ_1 . O autovetor associado a λ_2 , será dado por $\overline{K_1}$. Em verdade, $\{X_1(t), X_2(t)\}$ constitui um conjunto fundamental de soluções para a equação matricial $X'(t) = A \cdot X(t)$, onde

$$X_1(t) = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

e

$$X_2(t) = [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}.$$

Aqui, $B_1 = \text{Re}(K_1)$ e $B_2 = \text{Im}(K_1)$.

Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + y.\end{aligned}\tag{7}$$

Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + y.\end{aligned}\tag{7}$$

O sistema (7) pode ser representado na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + y.\end{aligned}\tag{7}$$

O sistema (7) pode ser representado na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e consideremos que λ seja um autovalor de A .

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$.

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0.$$

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0.$$

A matriz A admite dois autovalores: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$.

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0.$$

A matriz A admite dois autovalores: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. O autovalor $\lambda_1 = 4$ está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0.$$

A matriz A admite dois autovalores: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. O autovalor $\lambda_1 = 4$ está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e o autovalor $\lambda_2 = -2$ está associado ao autovetor $K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Existe $K \neq \vec{0}$ tal que $AK = \lambda K$. Assim, $(A - \lambda I_2)K = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0.$$

A matriz A admite dois autovalores: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. O autovalor $\lambda_1 = 4$ está associado ao autovetor $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e o autovalor $\lambda_2 = -2$ está associado ao autovetor $K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Logo, a solução geral do sistema (7) é dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t},$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas.

Isto é, $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$

Isto é, $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ e $y(t) = c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t}$.

Isto é, $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ e $y(t) = c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t}$.
Seja o par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fixado.

Isto é, $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ e $y(t) = c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t}$.

Seja o par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fixado. Sabemos que o sistema (7) admite uma única solução sujeita a

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro fixado.

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

Aqui, $c_1 + c_2 = 1$

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

Aqui, $c_1 + c_2 = 1$ e $c_1 - c_2 = 3$.

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

Aqui, $c_1 + c_2 = 1$ e $c_1 - c_2 = 3$. Isto implica que $c_1 = 2$

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

Aqui, $c_1 + c_2 = 1$ e $c_1 - c_2 = 3$. Isto implica que $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$.

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

Aqui, $c_1 + c_2 = 1$ e $c_1 - c_2 = 3$. Isto implica que $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$.

Logo,

$$x(t) = 2e^{4t} - e^{-2t}$$

Seja o sistema

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

sujeito a $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$.

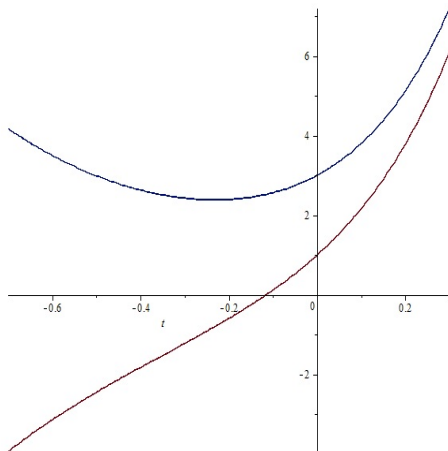
Aqui, $c_1 + c_2 = 1$ e $c_1 - c_2 = 3$. Isto implica que $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$.

Logo,

$$x(t) = 2e^{4t} - e^{-2t}$$

e

$$y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}.$$



Se as condições iniciais fossem $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$, verificaríamos que $x(t) = y(t) = 0$.

Se as condições iniciais fossem $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$, verificaríamos que $x(t) = y(t) = 0$.

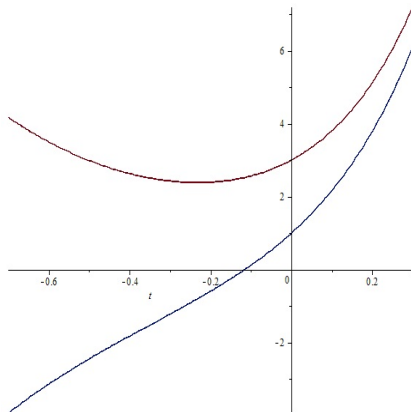
Se as condições iniciais fossem $x(0) = 3$ e $y(0) = 1$, verificaríamos que $x(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$

Se as condições iniciais fossem $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$, verificaríamos que $x(t) = y(t) = 0$.

Se as condições iniciais fossem $x(0) = 3$ e $y(0) = 1$, verificaríamos que $x(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$ e $y(t) = 2e^{4t} - e^{-2t}$.

Se as condições iniciais fossem $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$,
verificaríamos que $x(t) = y(t) = 0$.

Se as condições iniciais fossem $x(0) = 3$ e $y(0) = 1$,
verificaríamos que $x(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$ e $y(t) = 2e^{4t} - e^{-2t}$.



SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Um sistema autônomo plano pode ser colocado na seguinte forma

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (8)$$

onde P e Q são contínuas.

SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Um sistema autônomo plano pode ser colocado na seguinte forma

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (8)$$

onde P e Q são contínuas.

Observamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ caracteriza o formato vetorial da solução do sistema (8).

SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Um sistema autônomo plano pode ser colocado na seguinte forma

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (8)$$

onde P e Q são contínuas.

Observamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ caracteriza o formato vetorial da solução do sistema (8).

Suponhamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ represente o deslocamento de uma partícula pelo plano no decorrer do tempo t , esta agora uma variável positiva (para fazer sentido físico).

SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Um sistema autônomo plano pode ser colocado na seguinte forma

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (8)$$

onde P e Q são contínuas.

Observamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ caracteriza o formato vetorial da solução do sistema (8).

Suponhamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ represente o deslocamento de uma partícula pelo plano no decorrer do tempo t , esta agora uma variável positiva (para fazer sentido físico).

Assumindo que tal partícula esteja inicialmente no ponto (x_0, y_0) , evidentemente, temos que $X(0) = (x_0, y_0)$. Como $X(t) = (x(t), y(t))$ representa um deslocamento, $X'(t) = (x'(t), y'(t))$ representa sua velocidade no instante t .

SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Um sistema autônomo plano pode ser colocado na seguinte forma

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (8)$$

onde P e Q são contínuas.

Observamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ caracteriza o formato vetorial da solução do sistema (8).

Suponhamos que $X(t) = (x(t), y(t))$ represente o deslocamento de uma partícula pelo plano no decorrer do tempo t , esta agora uma variável positiva (para fazer sentido físico).

Assumindo que tal partícula esteja inicialmente no ponto (x_0, y_0) , evidentemente, temos que $X(0) = (x_0, y_0)$. Como $X(t) = (x(t), y(t))$ representa um deslocamento, $X'(t) = (x'(t), y'(t))$ representa sua velocidade no instante t .

Fazendo $V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ campo vetorial, observa-se que $V(x, y)$ caracteriza a velocidade da corrente em (x, y) , pois, $x'(t) = P(x(t), y(t))$ e $y'(t) = Q(x(t), y(t))$.

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

Assumamos que $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$. Estamos considerando que, no tempo $t = 0$, $x = 1$ e $y = 3$.

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

Assumamos que $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$. Estamos considerando que, no tempo $t = 0$, $x = 1$ e $y = 3$.

Daí, no tempo $t = 0$, $x' = 1 + 3 \cdot 3 = 10$ e $y' = 3 \cdot 1 + 3 = 6$.

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = x + 3y$$

$$y' = 3x + y$$

Assumamos que $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$. Estamos considerando que, no tempo $t = 0$, $x = 1$ e $y = 3$.

Daí, no tempo $t = 0$, $x' = 1 + 3 \cdot 3 = 10$ e $y' = 3 \cdot 1 + 3 = 6$. No tempo $t = 0$, a velocidade da “partícula” com relação à variável t , é 10 no componente x e, 6 no componente y .

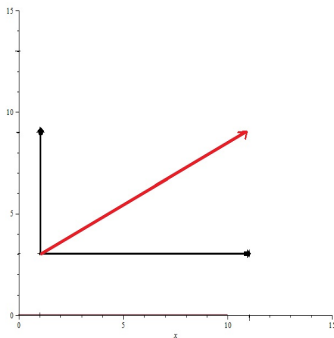
Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = x + 3y$$

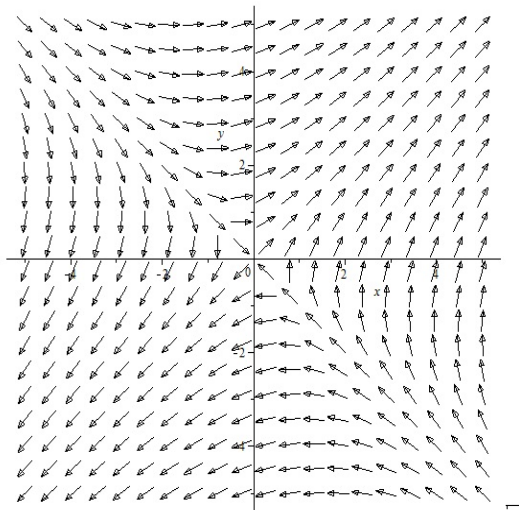
$$y' = 3x + y$$

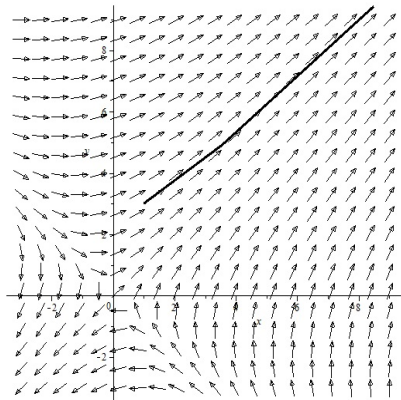
Assumamos que $x(0) = 1$ e $y(0) = 3$. Estamos considerando que, no tempo $t = 0$, $x = 1$ e $y = 3$.

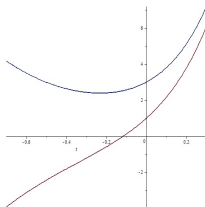
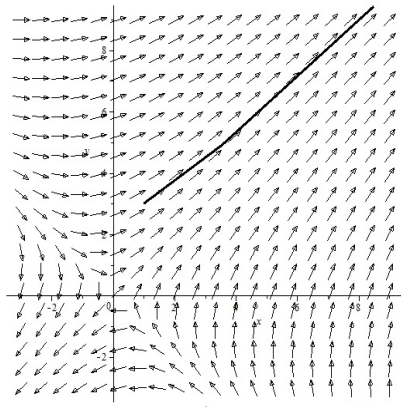
Daí, no tempo $t = 0$, $x' = 1 + 3 \cdot 3 = 10$ e $y' = 3 \cdot 1 + 3 = 6$. No tempo $t = 0$, a velocidade da “partícula” com relação à variável t , é 10 no componente x e, 6 no componente y .



O sistema $x' = x + 3y$, $y' = 3x + y$, determina o seguinte campo vetorial:

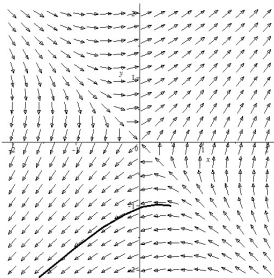




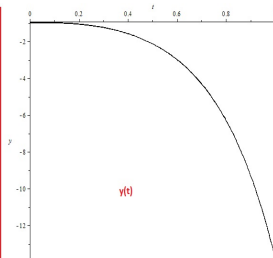
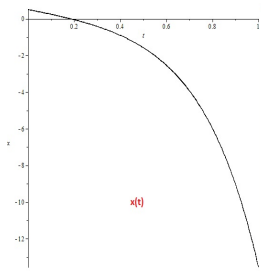
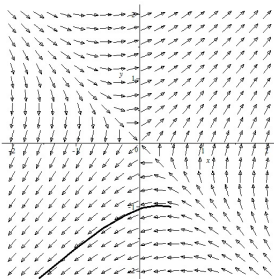


O sistema $x' = x + 3y$, $y' = 3x + y$, sujeito a $x(0) = 0,5$ e $y(0) = -1$,

O sistema $x' = x + 3y$, $y' = 3x + y$, sujeito a $x(0) = 0,5$ e $y(0) = -1$,



O sistema $x' = x + 3y$, $y' = 3x + y$, sujeito a $x(0) = 0,5$ e $y(0) = -1$,



Observamos que as soluções do sistema autônomo plano podem ser de três tipos básicos:

Observamos que as soluções do sistema autônomo plano podem ser de três tipos básicos:

- Uma solução constante $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, para todo t .
Como se pode perceber, neste caso, interpretamos que se uma partícula está inicialmente num ponto $X(0) = X_0$, ali ela permanecerá indefinidamente, pois, $x'(t) = y'(t) = 0$, para todo t .

Observamos que as soluções do sistema autônomo plano podem ser de três tipos básicos:

- Uma solução constante $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, para todo t .
Como se pode perceber, neste caso, interpretamos que se uma partícula está inicialmente num ponto $X(0) = X_0$, ali ela permanecerá indefinidamente, pois, $x'(t) = y'(t) = 0$, para todo t . Uma solução constante é também chamada de **ponto crítico**.

Observamos que as soluções do sistema autônomo plano podem ser de três tipos básicos:

- Uma solução constante $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, para todo t .
Como se pode perceber, neste caso, interpretamos que se uma partícula está inicialmente num ponto $X(0) = X_0$, ali ela permanecerá indefinidamente, pois, $x'(t) = y'(t) = 0$, para todo t . Uma solução constante é também chamada de **ponto crítico**.
- Uma solução $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define um arco, ou seja, uma curva plana que não se intercepta.

Observamos que as soluções do sistema autônomo plano podem ser de três tipos básicos:

- Uma solução constante $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, para todo t . Como se pode perceber, neste caso, interpretamos que se uma partícula está inicialmente num ponto $X(0) = X_0$, ali ela permanecerá indefinidamente, pois, $x'(t) = y'(t) = 0$, para todo t . Uma solução constante é também chamada de **ponto crítico**.
- Uma solução $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define um arco, ou seja, uma curva plana que não se intercepta.
- Uma solução periódica $x = x(t)$, $y = y(t)$. Esta solução, também chamada de ciclo, ocorre quando existe um período p tal que $X(t + p) = X(t)$. Nestas circunstâncias, se uma partícula é colocada sobre a curva em X_0 percorrerá outros pontos do plano e voltará a X_0 transcorridas p unidades de tempo.

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Notemos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ é um ponto crítico para este sistema.

Consideremos o sistema

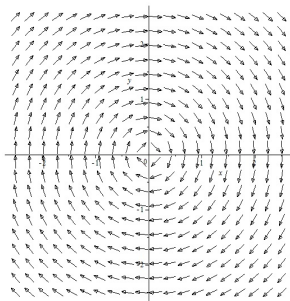
$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Notemos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ é um ponto crítico para este sistema. O sistema, em questão, gera o seguinte campo vetorial:

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

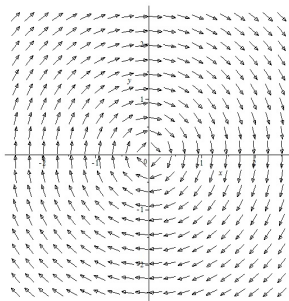
Notemos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ é um ponto crítico para este sistema. O sistema, em questão, gera o seguinte campo vetorial:



Consideremos o sistema

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Notemos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ é um ponto crítico para este sistema. O sistema, em questão, gera o seguinte campo vetorial:

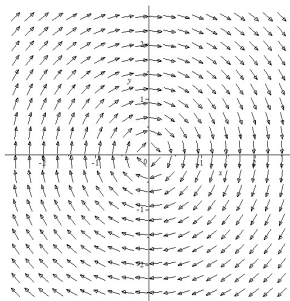


Suponhamos que $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

Consideremos o sistema

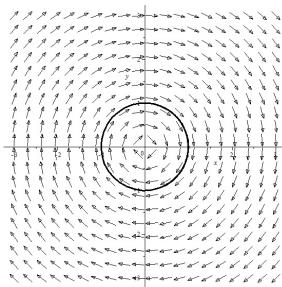
$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Notemos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ é um ponto crítico para este sistema. O sistema, em questão, gera o seguinte campo vetorial:

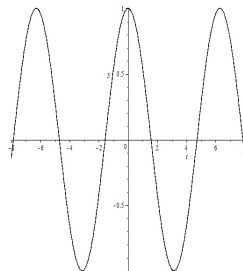
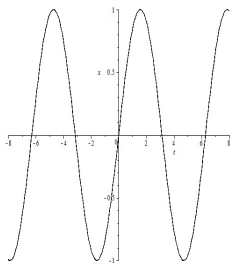
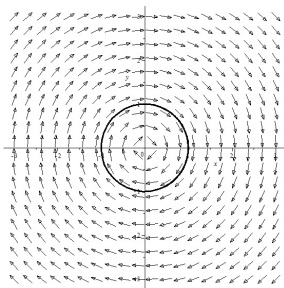


Suponhamos que $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Vemos nitidamente a situação em que a curva é periódica.

Solucionando este problema de valor inicial, determinamos que $x(t) = \sin(t)$ e $y(t) = \cos(t)$.



Solucionando este problema de valor inicial, determinamos que $x(t) = \sin(t)$ e $y(t) = \cos(t)$.



ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Consideremos o sistema autônomo plano (8),

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y),$$

onde P e Q são contínuas.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Consideremos o sistema autônomo plano (8),

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y),$$

onde P e Q são contínuas. Suponhamos que $X(t)$ seja a solução sujeita à condição inicial $X(0) = X_0$.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Consideremos o sistema autônomo plano (8),

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y),$$

onde P e Q são contínuas. Suponhamos que $X(t)$ seja a solução sujeita à condição inicial $X(0) = X_0$.

Se X_0 for um ponto crítico, a partícula permanece estacionária, ou seja, mesmo variando-se t a partícula não se moverá.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Consideremos o sistema autônomo plano (8),

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y),$$

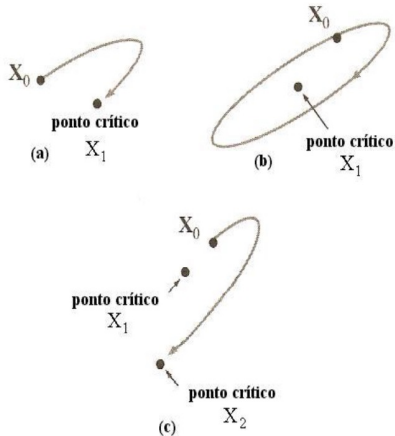
onde P e Q são contínuas. Suponhamos que $X(t)$ seja a solução sujeita à condição inicial $X(0) = X_0$.

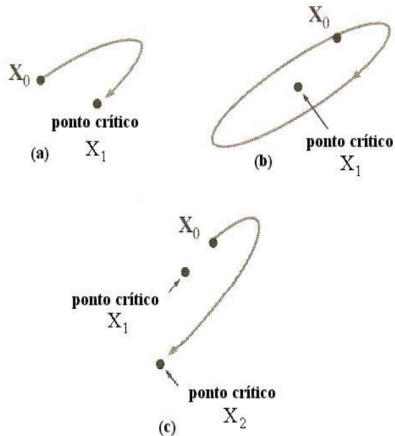
Se X_0 for um ponto crítico, a partícula permanece estacionária, ou seja, mesmo variando-se t a partícula não se moverá. Entretanto, se X_0 não for um ponto crítico, estando este nas proximidades de um ponto crítico X_1 , podemos observar as distintas possibilidades de trajetórias:

- $X = X(t)$ descreve um arco de maneira que a condição inicial é respeitada e além disso, quando $t \rightarrow \infty$, segue que $X(t) \rightarrow X_1$.

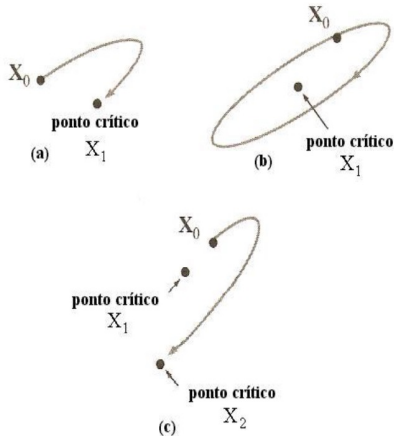
- $X = X(t)$ descreve um arco de maneira que a condição inicial é respeitada e além disso, quando $t \rightarrow \infty$, segue que $X(t) \rightarrow X_1$.
- $X = X(t)$ descreve um ciclo de forma que a trajetória nunca tende ao ponto crítico, mas também “não se afastará” de X_1 .

- $X = X(t)$ descreve um arco de maneira que a condição inicial é respeitada e além disso, quando $t \rightarrow \infty$, segue que $X(t) \rightarrow X_1$.
- $X = X(t)$ descreve um ciclo de forma que a trajetória nunca tende ao ponto crítico, mas também “não se afastará” de X_1 .
- $X = X(t)$ descreve um arco de maneira que a condição inicial é respeitada e além disto, quando $t \rightarrow \infty$, segue que $X(t) \rightarrow X_2$. Considerando X_2 seja um outro ponto crítico, temos que a trajetória não se aproxima do ponto crítico X_1 .





Nos casos (a) e (b), o ponto crítico X_1 é estável.



Nos casos (a) e (b), o ponto crítico X_1 é estável. No caso (c), o ponto crítico X_1 é instável.

Definição

Seja X_1 um ponto crítico de um sistema autônomo, e denotemos por $X = X(t)$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq X_1$. Diz-se que X_1 é um ponto crítico estável se, dado um raio arbitrário $\rho > 0$, existe um raio correspondente $r > 0$ tal que, se a posição inicial X_0 satisfizer $|X_0 - X_1| < r$, então, a solução $X(t)$ correspondente verifica $|X(t) - X_1| < \rho$, para todo $t > 0$.

Definição

Seja X_1 um ponto crítico de um sistema autônomo, e denotemos por $X = X(t)$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq X_1$. Diz-se que X_1 é um ponto crítico estável se, dado um raio arbitrário $\rho > 0$, existe um raio correspondente $r > 0$ tal que, se a posição inicial X_0 satisfizer $|X_0 - X_1| < r$, então, a solução $X(t)$ correspondente verifica $|X(t) - X_0| < \rho$, para todo $t > 0$. Se, além disto, $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X_1$, sempre que $|X_0 - X_1| < r$, X_1 é chamado de ponto crítico assintoticamente estável.

Definição

Seja X_1 um ponto crítico de um sistema autônomo, e denotemos por $X = X(t)$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$ com $X(0) \neq X_1$. Diz-se que X_1 é um ponto crítico instável quando existe um disco de raio $\rho > 0$ com a propriedade de que, para qualquer $r > 0$, existe uma posição inicial X_0 satisfazendo $|X_0 - X_1| < r$ e, entretanto, a solução correspondente $X(t)$ satisfaz $|X(t) - X_1| \geq \rho$, para algum $t > 0$.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS (LINEARES)

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (9)$$

onde a , b , c e d são constantes reais.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS (LINEARES)

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (9)$$

onde a , b , c e d são constantes reais. Suponhamos, inicialmente, que o par $(x, y) = (0, 0)$ seja o único ponto crítico do sistema (9).

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS (LINEARES)

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (9)$$

onde a , b , c e d são constantes reais. Suponhamos, inicialmente, que o par $(x, y) = (0, 0)$ seja o único ponto crítico do sistema (9).

O sistema (9) pode ser apresentado como $X' = BX$, onde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de coeficientes.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS (LINEARES)

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (9)$$

onde a , b , c e d são constantes reais. Suponhamos, inicialmente, que o par $(x, y) = (0, 0)$ seja o único ponto crítico do sistema (9).

O sistema (9) pode ser apresentado como $X' = BX$, onde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de coeficientes. Como $(0, 0)$ é o único ponto crítico do sistema, verificamos que $\det(B) \neq 0$.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS (LINEARES)

Consideremos o sistema autônomo plano

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (9)$$

onde a , b , c e d são constantes reais. Suponhamos, inicialmente, que o par $(x, y) = (0, 0)$ seja o único ponto crítico do sistema (9).

O sistema (9) pode ser apresentado como $X' = BX$, onde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de coeficientes. Como $(0, 0)$ é o único ponto crítico do sistema, verificamos que $\det(B) \neq 0$.

Logo, $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Consideremos que λ seja um autovalor da matriz B .

Consideremos que λ seja um autovalor da matriz B . Temos que

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Consideremos que λ seja um autovalor da matriz B . Temos que

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Isto indica que

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Consideremos que λ seja um autovalor da matriz B . Temos que

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Isto indica que

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Considerando que $\tau = a + d$, a sentença

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

deve ser respeitada.

Consideremos que λ seja um autovalor da matriz B . Temos que

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Isto indica que

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Considerando que $\tau = a + d$, a sentença

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

deve ser respeitada.

Logo, os autovalores da matriz B satisfazem

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}.$$

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

Evidentemente, nesta situação, $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

Evidentemente, nesta situação, $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Suponhamos que λ_1 e λ_2 sejam os autovalores relativos à matriz B . Além disto, consideremos que K_1 e K_2 sejam os autovetores desta matriz correspondentes, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 .

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

Evidentemente, nesta situação, $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Suponhamos que λ_1 e λ_2 sejam os autovalores relativos à matriz B . Além disto, consideremos que K_1 e K_2 sejam os autovetores desta matriz correspondentes, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 .

Sabemos que a solução geral do sistema (9) é determinada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

Evidentemente, nesta situação, $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Suponhamos que λ_1 e λ_2 sejam os autovalores relativos à matriz B . Além disto, consideremos que K_1 e K_2 sejam os autovetores desta matriz correspondentes, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 .

Sabemos que a solução geral do sistema (9) é determinada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]. \quad (10)$$

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

Evidentemente, nesta situação, $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Suponhamos que λ_1 e λ_2 sejam os autovalores relativos à matriz B . Além disto, consideremos que K_1 e K_2 sejam os autovetores desta matriz correspondentes, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 .

Sabemos que a solução geral do sistema (9) é determinada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]. \quad (10)$$

Os autovalores, neste caso, podem ser ambos negativos, ambos positivos ou terem sinais diferentes.

CASO 1: Autovalores Reais Distintos.

Evidentemente, nesta situação, $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Suponhamos que λ_1 e λ_2 sejam os autovalores relativos à matriz B . Além disto, consideremos que K_1 e K_2 sejam os autovetores desta matriz correspondentes, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 .

Sabemos que a solução geral do sistema (9) é determinada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]. \quad (10)$$

Os autovalores, neste caso, podem ser ambos negativos, ambos positivos ou terem sinais diferentes. Analisaremos cada caso separadamente.

CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos.

CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ e $\Delta > 0$.

CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \vec{0}.$$

CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \vec{0}.$$

O ponto crítico $(0, 0)$, nesta situação, é denominado nó estável.

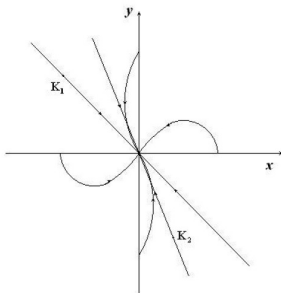
CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \vec{0}.$$

O ponto crítico $(0, 0)$, nesta situação, é denominado nó estável.



CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos.

CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ e $\Delta > 0$.

CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty.$$

CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty.$$

O ponto crítico $(0, 0)$, nesta situação, é denominado nó instável.

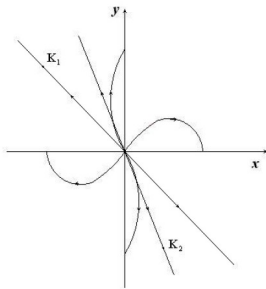
CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ e $\Delta > 0$. Admitamos $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty.$$

O ponto crítico $(0, 0)$, nesta situação, é denominado nó instável.



CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$.

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Admitamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Admitamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}].$$

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Admitamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}].$$

Quando $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$.

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Admitamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}].$$

Quando $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$. Notemos que, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{\lambda_2 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, portanto, $X(t) \rightarrow \vec{0}$.

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Admitamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}].$$

Quando $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$. Notemos que, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{\lambda_2 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, portanto, $X(t) \rightarrow \vec{0}$.

Quando $c_2 = 0$, $X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t}$.

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos.

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Admitamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Observando a expressão (10), temos que

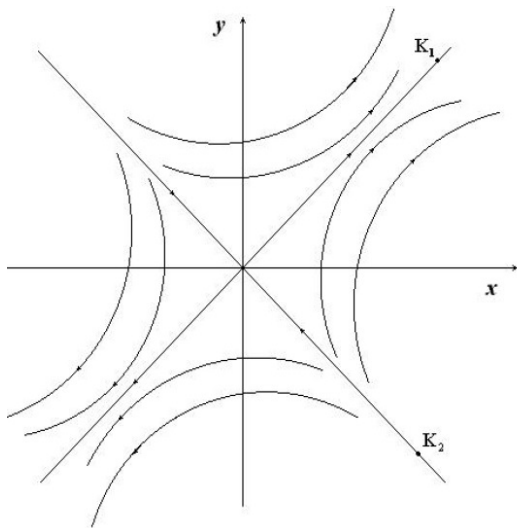
$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}].$$

Quando $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$. Notemos que, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{\lambda_2 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, portanto, $X(t) \rightarrow \vec{0}$.

Quando $c_2 = 0$, $X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t}$. Notemos que, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{\lambda_1 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ e, portanto, $X(t)$ se afasta da origem.

No caso 1.C, o ponto crítico $(0, 0)$ determina um ponto de sela.

No caso 1.C, o ponto crítico $(0,0)$ determina um ponto de sela.



CASO 2 - Um autovalor real repetido.

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

Neste caso, temos que

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t}$$

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

Neste caso, temos que

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (c_1 K_1 + c_2 K_2).$$

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

Neste caso, temos que

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (c_1 K_1 + c_2 K_2).$$

(a) Se $\lambda < 0$, temos que $X(t)$ se aproxima da origem.

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

Neste caso, temos que

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (c_1 K_1 + c_2 K_2).$$

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $X(t)$ se aproxima da origem. Nesta situação, dizemos que $(0, 0)$ é um nó estável degenerado.

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

Neste caso, temos que

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (c_1 K_1 + c_2 K_2).$$

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $X(t)$ se aproxima da origem. Nesta situação, dizemos que $(0, 0)$ é um nó estável degenerado.
- (b) Se $\lambda > 0$, temos que $X(t)$ se afasta da origem.

CASO 2 - Um autovalor real repetido.

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Duas situações precisam ser consideradas:

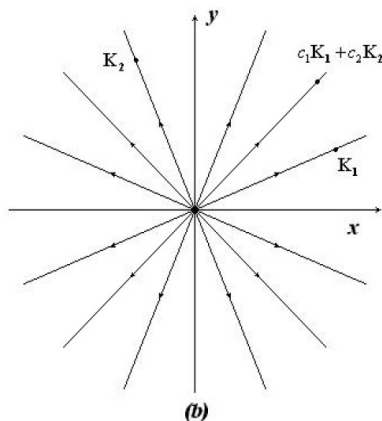
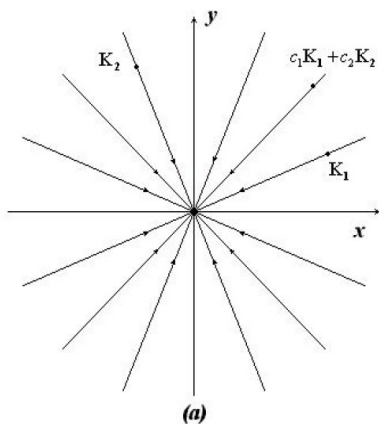
CASO 2.A. Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido λ .

Consideremos que K_1 e K_2 sejam dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor real λ .

Neste caso, temos que

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (c_1 K_1 + c_2 K_2).$$

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $X(t)$ se aproxima da origem. Nesta situação, dizemos que $(0, 0)$ é um nó estável degenerado.
- (b) Se $\lambda > 0$, temos que $X(t)$ se afasta da origem. Temos, nesta situação, que $(0, 0)$ é um nó instável degenerado.



CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t})$$

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t} \left(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right)$$

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t} \left(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right),$$

onde $(B - \lambda I_2)P = K_1$.

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t} \left(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right),$$

onde $(B - \lambda I_2)P = K_1$.

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $t e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, por consequência, $X(t)$ tende a zero.

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t} \left(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right),$$

onde $(B - \lambda I_2)P = K_1$.

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $t e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, por consequência, $X(t)$ tende a zero. Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto crítico nó estável degenerado.

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t} \left(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right),$$

onde $(B - \lambda I_2)P = K_1$.

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $t e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, por consequência, $X(t)$ tende a zero. Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto crítico nó estável degenerado.
- (b) Se $\lambda > 0$, temos que $t e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ e, por consequência, $X(t)$ se afasta da origem.

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido λ .

Conforme estudado, neste caso, a solução geral é dada por

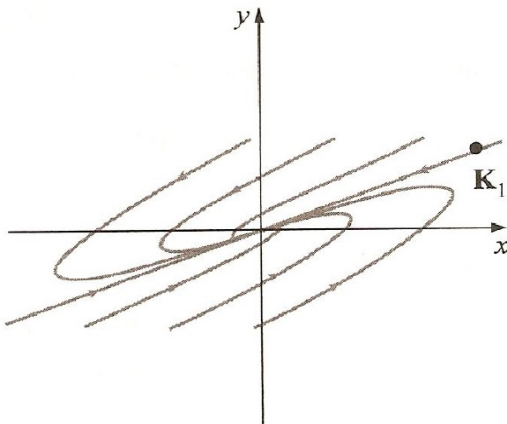
$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t} \left(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right),$$

onde $(B - \lambda I_2)P = K_1$.

- (a) Se $\lambda < 0$, temos que $t e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, por consequência, $X(t)$ tende a zero. Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto crítico nó estável degenerado.
- (b) Se $\lambda > 0$, temos que $t e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ e, por consequência, $X(t)$ se afasta da origem. Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto crítico nó instável degenerado.

Na figura abaixo, uma outra situação em que há nó estável degenerado.

Na figura abaixo, uma outra situação em que há nó estável degenerado.



CASO 3. Dois autovalores complexos (não-reais).

CASO 3. Dois autovalores complexos (não-reais).
Esta é a situação em que $\tau^2 - 4\Delta < 0$.

CASO 3. Dois autovalores complexos (não-reais).

Esta é a situação em que $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Os autovalores são $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

CASO 3. Dois autovalores complexos (não-reais).

Esta é a situação em que $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Os autovalores são $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Neste caso, após algumas adaptações, deduz-se que

$$x(t) = e^{\alpha t} [a_{11} \cos(\beta t) + a_{12} \sin(\beta t)]$$

CASO 3. Dois autovalores complexos (não-reais).

Esta é a situação em que $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Os autovalores são $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Neste caso, após algumas adaptações, deduz-se que

$$x(t) = e^{\alpha t} [a_{11} \cos(\beta t) + a_{12} \sin(\beta t)]$$

e

$$y(t) = e^{\alpha t} [a_{21} \cos(\beta t) + a_{22} \sin(\beta t)].$$

CASO 3. Dois autovalores complexos (não-reais).

Esta é a situação em que $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Os autovalores são $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Neste caso, após algumas adaptações, deduz-se que

$$x(t) = e^{\alpha t} [a_{11} \cos(\beta t) + a_{12} \sin(\beta t)]$$

e

$$y(t) = e^{\alpha t} [a_{21} \cos(\beta t) + a_{22} \sin(\beta t)].$$

Analisaremos duas possíveis situações.

CASO 3.A. Autovalores Imaginários Puros

CASO 3.A. Autovalores Imaginários Puros ($\alpha = 0$).

CASO 3.A. Autovalores Imaginários Puros ($\alpha = 0$).

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau = 0$.

CASO 3.A. Autovalores Imaginários Puros ($\alpha = 0$).

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau = 0$.

Nesta situação, deduz-se que

$$x(t) = a_{11} \cos(\beta t) + a_{12} \sin(\beta t)$$

e

$$y(t) = a_{21} \cos(\beta t) + a_{22} \sin(\beta t).$$

CASO 3.A. Autovalores Imaginários Puros ($\alpha = 0$).

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau = 0$.

Nesta situação, deduz-se que

$$x(t) = a_{11} \cos(\beta t) + a_{12} \sin(\beta t)$$

e

$$y(t) = a_{21} \cos(\beta t) + a_{22} \sin(\beta t).$$

Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto de centro.

CASO 3.A. Autovalores Imaginários Puros ($\alpha = 0$).

Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau = 0$.

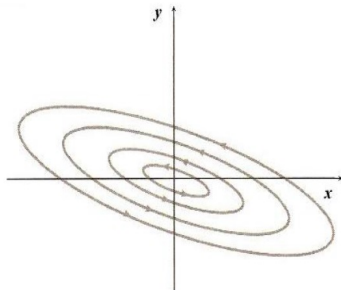
Nesta situação, deduz-se que

$$x(t) = a_{11} \cos(\beta t) + a_{12} \sin(\beta t)$$

e

$$y(t) = a_{21} \cos(\beta t) + a_{22} \sin(\beta t).$$

Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto de centro.



CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

(a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

- (a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

- (a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Aqui, $(0, 0)$ é um ponto espiral estável.

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

- (a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Aqui, $(0, 0)$ é um ponto espiral estável.
- (b) Quando $\alpha > 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

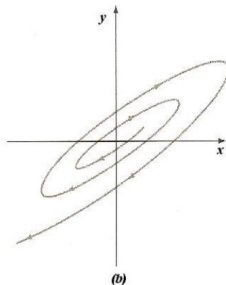
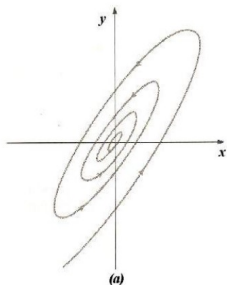
- (a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Aqui, $(0, 0)$ é um ponto espiral estável.
- (b) Quando $\alpha > 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$.

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

- (a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Aqui, $(0, 0)$ é um ponto espiral estável.
- (b) Quando $\alpha > 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Aqui, $(0, 0)$ é um ponto espiral instável.

CASO 3.B. Autovalores Complexos com parte real não-nula.
Aqui, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

- (a) Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Aqui, $(0,0)$ é um ponto espiral estável.
- (b) Quando $\alpha > 0$, $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Desta maneira, $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Aqui, $(0,0)$ é um ponto espiral instável.



Teorema

Para um sistema autônomo plano linear (9),

$$x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \quad y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t),$$

denotemos por $X = X(t) = (x(t), y(t))$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq \vec{0}$. Então,

Teorema

Para um sistema autônomo plano linear (9),

$$x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \quad y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t),$$

denotemos por $X = X(t) = (x(t), y(t))$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq \vec{0}$. Então,

- (a) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \vec{0}$, se e somente se, os autovalores de B têm partes reais negativas.

Teorema

Para um sistema autônomo plano linear (9),

$$x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \quad y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t),$$

denotemos por $X = X(t) = (x(t), y(t))$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq \vec{0}$. Então,

- (a) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \vec{0}$, se e somente se, os autovalores de B têm partes reais negativas. Isto ocorre quando $\Delta = ad - bc > 0$ e $\tau = a + d < 0$.

Teorema

Para um sistema autônomo plano linear (9),

$$x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \quad y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t),$$

denotemos por $X = X(t) = (x(t), y(t))$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq \vec{0}$. Então,

- (a) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \vec{0}$, se e somente se, os autovalores de B têm partes reais negativas. Isto ocorre quando $\Delta = ad - bc > 0$ e $\tau = a + d < 0$.
- (b) $X(t)$ é periódica, se e somente se, os autovalores de B são imaginários puros, o que ocorre quando $\Delta > 0$ e $\tau = 0$.

Teorema

Para um sistema autônomo plano linear (9),

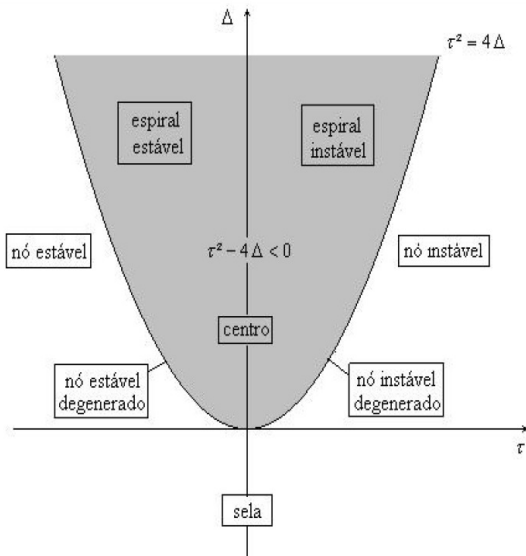
$$x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \quad y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t),$$

denotemos por $X = X(t) = (x(t), y(t))$ a solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, com $X_0 \neq \vec{0}$. Então,

- (a) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \vec{0}$, se e somente se, os autovalores de B têm partes reais negativas. Isto ocorre quando $\Delta = ad - bc > 0$ e $\tau = a + d < 0$.
- (b) $X(t)$ é periódica, se e somente se, os autovalores de B são imaginários puros, o que ocorre quando $\Delta > 0$ e $\tau = 0$.
- (c) Em todos os outros casos, dada uma vizinhança arbitrária da origem, há ao menos um X_0 nesta vizinhança para o qual $X(t)$ se torna arbitrariamente grande quando t cresce.

O teorema pode ser apresentado graficamente.

O teorema pode ser apresentado graficamente.



Em geral, sistemas autônomos de equações diferenciais não-lineares $X' = g(X)$ podem possuir mais de um ponto crítico, distinto de 0. Desta forma, a estabilidade para pontos críticos destes sistemas não pode ser verificada simplesmente através da teoria desenvolvida nos slides anteriores. Para verificação se tornar possível, se faz necessário a aplicação de um processo chamado linearização que consiste na substituição do termo $g(X)$ do sistema autônomo por um termo linear $A(X - X_1)$ que melhor aproxime $g(X)$ em uma vizinhança de X_1 , este último um ponto crítico na caracterização.

Teorema

Seja o sistema autônomo plano

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \quad (11)$$

Consideremos que $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ seja um ponto crítico do sistema autônomo plano (11).

Teorema

Seja o sistema autônomo plano

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \quad (11)$$

Consideremos que $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ seja um ponto crítico do sistema autônomo plano (11). Assumamos que $P(x, y)$ e que $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de X_1 .

Teorema

Seja o sistema autônomo plano

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \quad (11)$$

Consideremos que $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ seja um ponto crítico do sistema autônomo plano (11). Assumamos que $P(x, y)$ e que $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de X_1 . Finalmente, consideremos a matriz

$$A := \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

seja a matriz jacobiana em X_1 .

Teorema

Seja o sistema autônomo plano

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \quad (11)$$

Consideremos que $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ seja um ponto crítico do sistema autônomo plano (11). Assumamos que $P(x, y)$ e que $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de X_1 . Finalmente, consideremos a matriz

$$A := \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

seja a matriz jacobiana em X_1 . Se os autovalores da matriz A tiverem partes reais negativas, então, X_1 é um ponto crítico assintoticamente estável de (11).

Teorema

Seja o sistema autônomo plano

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \quad (11)$$

Consideremos que $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ seja um ponto crítico do sistema autônomo plano (11). Assumamos que $P(x, y)$ e que $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de X_1 . Finalmente, consideremos a matriz

$$A := \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

seja a matriz jacobiana em X_1 . Se os autovalores da matriz A tiverem partes reais negativas, então, X_1 é um ponto crítico assintoticamente estável de (11). Se A tiver um autovalor com parte real positiva, então, X_1 é um ponto crítico instável de (11).

Definamos

$$\tau := \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)}$$

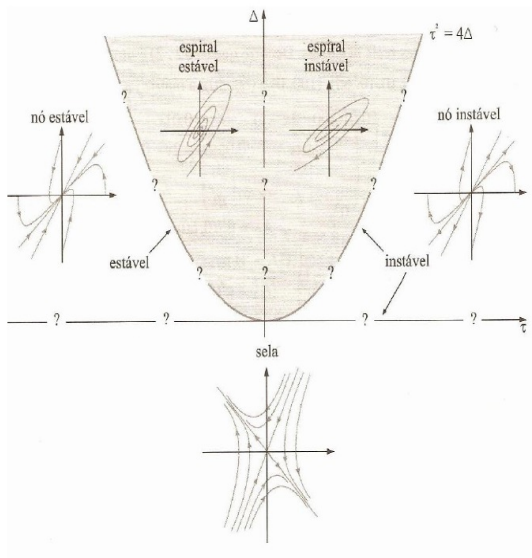
Definamos

$$\tau := \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)}$$

e

$$\Delta := \left(\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} \cdot \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \right) - \left(\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \cdot \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} \right).$$

Abaixo, o comportamento especificado para a estabilidade/instabilidade por intermédio de um esboço gráfico.



Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau > 0$, o ponto crítico X_1 é instável.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau > 0$, o ponto crítico X_1 é instável. Neste caso, o ponto crítico pode ser uma espiral instável, um nó instável ou um nó instável degenerado.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau > 0$, o ponto crítico X_1 é instável. Neste caso, o ponto crítico pode ser uma espiral instável, um nó instável ou um nó instável degenerado.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau < 0$, o ponto crítico X_1 é estável.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau > 0$, o ponto crítico X_1 é instável. Neste caso, o ponto crítico pode ser uma espiral instável, um nó instável ou um nó instável degenerado.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau < 0$, o ponto crítico X_1 é estável. Neste caso, o ponto crítico pode ser uma espiral estável, um nó estável ou um nó estável degenerado.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau > 0$, o ponto crítico X_1 é instável. Neste caso, o ponto crítico pode ser uma espiral instável, um nó instável ou um nó instável degenerado.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau < 0$, o ponto crítico X_1 é estável. Neste caso, o ponto crítico pode ser uma espiral estável, um nó estável ou um nó estável degenerado.

Se $\tau = 0$ e $\Delta > 0$, os autovalores de A são imaginários puros e, aqui, o ponto crítico X_1 pode ser uma espiral estável, uma espiral instável ou mesmo um ponto de centro.

MODELO DE COMPETIÇÃO DE LOTKA-VOLTERRA

O modelo de Lotka-Volterra ajuda a entender o que ocorre quando duas ou mais espécies, com características similares, competem entre si para obter alimento, água, espaço e outros recursos de um ecossistema. A utilização de um destes recursos por uma população restringe, por conseguinte, a capacidade da outra população sobreviver e crescer.

MODELO DE COMPETIÇÃO DE LOTKA-VOLTERRA

O modelo de Lotka-Volterra ajuda a entender o que ocorre quando duas ou mais espécies, com características similares, competem entre si para obter alimento, água, espaço e outros recursos de um ecossistema. A utilização de um destes recursos por uma população restringe, por conseguinte, a capacidade da outra população sobreviver e crescer.

A teoria parte da consideração de que $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sejam duas populações no tempo t .

Na ausência da espécie y , o crescimento da espécie x , segundo a equação logística, é dado por

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} \right),$$

onde k_1 é uma constante positiva que caracteriza crescimento e K_1 é a capacidade suporte do ambiente em relação à população da espécie x .

Na ausência da espécie y , o crescimento da espécie x , segundo a equação logística, é dado por

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} \right),$$

onde k_1 é uma constante positiva que caracteriza crescimento e K_1 é a capacidade suporte do ambiente em relação à população da espécie x .

Da mesma forma, convencionamos que, na ausência da espécie x , o crescimento da espécie y é dado pela equação

$$\frac{dy}{dt} = k_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} \right),$$

onde k_2 é uma constante positiva que caracteriza crescimento e K_2 é a capacidade suporte do ambiente em relação à população da espécie y .

Quando as duas espécies estão presentes no mesmo ambiente é de se esperar que uma interfira nos recursos da outra. Enquanto uma reduz o crescimento, a outra apresenta saturação populacional.

Quando as duas espécies estão presentes no mesmo ambiente é de se esperar que uma interfira nos recursos da outra. Enquanto uma reduz o crescimento, a outra apresenta saturação populacional.

A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x em relação à espécie y é obtida quando substituímos o fator de crescimento $1 - \frac{x}{K_1}$ por $1 - \frac{x}{K_1} - \alpha_1 y$, onde α_1 é constante positiva que caracteriza a medida do grau da interferência de y em razão de x .

Quando as duas espécies estão presentes no mesmo ambiente é de se esperar que uma interfira nos recursos da outra. Enquanto uma reduz o crescimento, a outra apresenta saturação populacional.

A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x em relação à espécie y é obtida quando substituímos o fator de crescimento $1 - \frac{x}{K_1}$ por $1 - \frac{x}{K_1} - \alpha_1 y$, onde α_1 é constante positiva que caracteriza a medida do grau da interferência de y em razão de x .

Da mesma forma, a expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie y em relação a x é obtida quando substituímos o fator $1 - \frac{y}{K_2}$ por $1 - \frac{y}{K_2} - \alpha_2 x$, onde α_2 é constante positiva que caracteriza a medida do grau da interferência de x em razão de y .

Consideremos o sistema autônomo plano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \alpha_1 y \right) \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \alpha_2 x \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Consideremos o sistema autônomo plano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \alpha_1 y \right) \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \alpha_2 x \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Fazendo $a_1 = k_1$, $b_1 = \frac{k_1}{K_1}$, $c_1 = \alpha_1 k_1$, $a_2 = k_2$, $b_2 = \frac{k_2}{K_2}$ e $c_2 = \alpha_2 k_2$, temos que

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(a_1 - b_1 x - c_1 y) \\ y'(t) &= y(a_2 - b_2 y - c_2 x).\end{aligned}$$

Consideremos o sistema autônomo plano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \alpha_1 y \right) \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \alpha_2 x \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Fazendo $a_1 = k_1$, $b_1 = \frac{k_1}{K_1}$, $c_1 = \alpha_1 k_1$, $a_2 = k_2$, $b_2 = \frac{k_2}{K_2}$ e $c_2 = \alpha_2 k_2$, temos que

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(a_1 - b_1 x - c_1 y) \\ y'(t) &= y(a_2 - b_2 y - c_2 x).\end{aligned}$$

Observamos que $(0, 0)$, $\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$ e $\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$ são pontos críticos do sistema (12).

Consideremos o sistema autônomo plano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \alpha_1 y \right) \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \alpha_2 x \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Fazendo $a_1 = k_1$, $b_1 = \frac{k_1}{K_1}$, $c_1 = \alpha_1 k_1$, $a_2 = k_2$, $b_2 = \frac{k_2}{K_2}$ e $c_2 = \alpha_2 k_2$, temos que

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(a_1 - b_1 x - c_1 y) \\ y'(t) &= y(a_2 - b_2 y - c_2 x).\end{aligned}$$

Observamos que $(0, 0)$, $\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$ e $\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$ são pontos críticos do sistema (12). Além disto, existe (x, y) , ponto crítico de (12), tal que $a_1 - b_1 x - c_1 y = 0$ e $a_2 - b_2 y - c_2 x = 0$.

Da equação $x'(t) = x(a_1 - b_1x - c_1y)$, podemos, entretanto, observar que x cresce quando $a_1 - b_1x - c_1y > 0$ (pois, x é considerado como número maior que zero).

Da equação $x'(t) = x(a_1 - b_1x - c_1y)$, podemos, entretanto, observar que x cresce quando $a_1 - b_1x - c_1y > 0$ (pois, x é considerado como número maior que zero).

Analogamente, observamos que x decresce quando $a_1 - b_1x - c_1y < 0$.

Da equação $x'(t) = x(a_1 - b_1x - c_1y)$, podemos, entretanto, observar que x cresce quando $a_1 - b_1x - c_1y > 0$ (pois, x é considerado como número maior que zero).

Analogamente, observamos que x decresce quando $a_1 - b_1x - c_1y < 0$.

Da equação $y'(t) = y(a_2 - b_2y - c_2x)$, observamos que y cresce quando $a_2 - b_2y - c_2x > 0$ e decresce se $a_2 - b_2y - c_2x < 0$.

Da equação $x'(t) = x(a_1 - b_1x - c_1y)$, podemos, entretanto, observar que x cresce quando $a_1 - b_1x - c_1y > 0$ (pois, x é considerado como número maior que zero).

Analogamente, observamos que x decresce quando $a_1 - b_1x - c_1y < 0$.

Da equação $y'(t) = y(a_2 - b_2y - c_2x)$, observamos que y cresce quando $a_2 - b_2y - c_2x > 0$ e decresce se $a_2 - b_2y - c_2x < 0$.

Imaginando o plano xy , podemos compreender as soluções para o sistema autônomo plano proposto como o deslocamento de $(x(t), y(t))$ em função do tempo t .

Da equação $x'(t) = x(a_1 - b_1x - c_1y)$, podemos, entretanto, observar que x cresce quando $a_1 - b_1x - c_1y > 0$ (pois, x é considerado como número maior que zero).

Analogamente, observamos que x decresce quando $a_1 - b_1x - c_1y < 0$.

Da equação $y'(t) = y(a_2 - b_2y - c_2x)$, observamos que y cresce quando $a_2 - b_2y - c_2x > 0$ e decresce se $a_2 - b_2y - c_2x < 0$.

Imaginando o plano xy , podemos compreender as soluções para o sistema autônomo plano proposto como o deslocamento de $(x(t), y(t))$ em função do tempo t .

Suponhamos que a população inicial (x_0, y_0) seja caracterizada no instante $t = 0$.

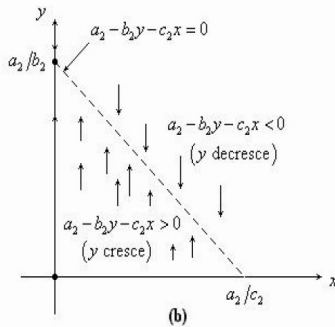
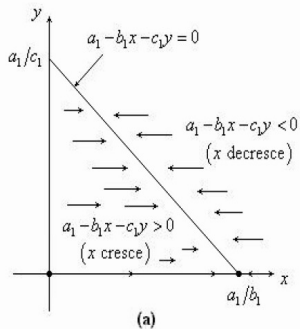
Da equação $x'(t) = x(a_1 - b_1x - c_1y)$, podemos, entretanto, observar que x cresce quando $a_1 - b_1x - c_1y > 0$ (pois, x é considerado como número maior que zero).

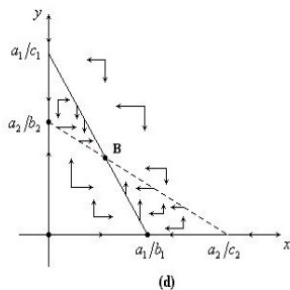
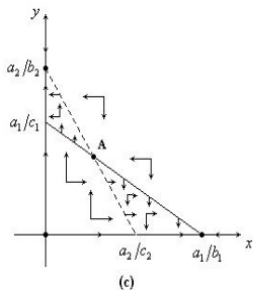
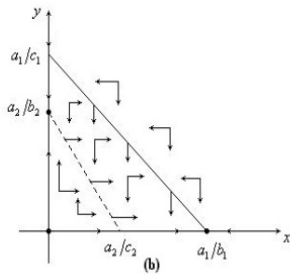
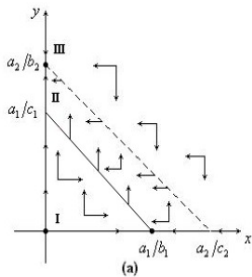
Analogamente, observamos que x decresce quando $a_1 - b_1x - c_1y < 0$.

Da equação $y'(t) = y(a_2 - b_2y - c_2x)$, observamos que y cresce quando $a_2 - b_2y - c_2x > 0$ e decresce se $a_2 - b_2y - c_2x < 0$.

Imaginando o plano xy , podemos compreender as soluções para o sistema autônomo plano proposto como o deslocamento de $(x(t), y(t))$ em função do tempo t .

Suponhamos que a população inicial (x_0, y_0) seja caracterizada no instante $t = 0$. As figuras, a seguir, ajudam a interpretar o que ocorre com os habitantes de x e y com o passar do tempo.





Problema: Consideremos x e y as densidades populacionais não-nulas (em indivíduos por m^3 de água) de duas espécies de peixe, respectivamente, A e B , que competem pelos mesmos recursos em um lago qualquer do planeta Terra.

Problema: Consideremos x e y as densidades populacionais não-nulas (em indivíduos por m^3 de água) de duas espécies de peixe, respectivamente, A e B , que competem pelos mesmos recursos em um lago qualquer do planeta Terra. Assumamos que $\frac{dx}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie A .

Problema: Consideremos x e y as densidades populacionais não-nulas (em indivíduos por m^3 de água) de duas espécies de peixe, respectivamente, A e B , que competem pelos mesmos recursos em um lago qualquer do planeta Terra. Assumamos que $\frac{dx}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie A . Da mesma forma, consideremos que $\frac{dy}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie B .

Problema: Consideremos x e y as densidades populacionais não-nulas (em indivíduos por m^3 de água) de duas espécies de peixe, respectivamente, A e B , que competem pelos mesmos recursos em um lago qualquer do planeta Terra. Assumamos que $\frac{dx}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie A . Da mesma forma, consideremos que $\frac{dy}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie B . Tais taxas são descritas da forma seguinte:

$$\frac{dx}{dt} = x(10 - 0,2x - 0,4y)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = y(50 - 0,2y - 0,5x).$$

Problema: Consideremos x e y as densidades populacionais não-nulas (em indivíduos por m^3 de água) de duas espécies de peixe, respectivamente, A e B , que competem pelos mesmos recursos em um lago qualquer do planeta Terra. Assumamos que $\frac{dx}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie A . Da mesma forma, consideremos que $\frac{dy}{dt}$ seja a taxa de crescimento da densidade populacional da espécie B . Tais taxas são descritas da forma seguinte:

$$\frac{dx}{dt} = x(10 - 0,2x - 0,4y)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = y(50 - 0,2y - 0,5x).$$

O que podemos esperar para os valores de x e y com o passar do tempo t ?

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos:

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos: $(0, 0)$,

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos: $(0, 0)$, $(0, 250)$,

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos: $(0, 0)$, $(0, 250)$, $(50, 0)$

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos: $(0, 0)$, $(0, 250)$, $(50, 0)$ e $\left(\frac{225}{2}, -\frac{125}{4}\right)$.

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos: $(0, 0)$, $(0, 250)$, $(50, 0)$ e $\left(\frac{225}{2}, -\frac{125}{4}\right)$. Analisaremos os três primeiros casos.

Vemos que

$$x' = 10x - 0,2x^2 - 0,4xy$$

e

$$y' = 50y - 0,2y^2 - 0,5xy.$$

Este sistema autônomo plano não-linear admite quatro pontos críticos: $(0, 0)$, $(0, 250)$, $(50, 0)$ e $\left(\frac{225}{2}, -\frac{125}{4}\right)$. Analisaremos os três primeiros casos.

Consideremos a matriz

$$g'((x, y)) = \begin{pmatrix} 10 - 0,4x - 0,4y & -0,4x \\ -0,5y & 50 - 0,4y - 0,5x \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$g'((0,0)) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$g'((0,0)) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de $g'((0,0))$ são 10 e 50, valores reais positivos, observamos que $(0,0)$ é um ponto crítico instável. Na verdade, $(0,0)$ é um nó instável, já que tanto o determinante, quanto o traço da matriz $g'((0,0))$ são valores positivos.

Notemos que

$$g'((0,0)) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de $g'((0,0))$ são 10 e 50, valores reais positivos, observamos que $(0,0)$ é um ponto crítico instável. Na verdade, $(0,0)$ é um nó instável, já que tanto o determinante, quanto o traço da matriz $g'((0,0))$ são valores positivos.

Fisicamente, entendemos que dado um par ordenado (x_0, y_0) , de valores iniciais para densidades populacionais propostas respectivamente a A e a B , muito próximas ao ponto crítico $(0,0)$, com o crescimento do tempo t , veremos que $(x(t), y(t))$ se afastará deste ponto crítico, caracterizando mudanças no valor destas densidades populacionais.

Notemos também que

$$g'((50, 0)) = \begin{pmatrix} -10 & -20 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Notemos também que

$$g'((50, 0)) = \begin{pmatrix} -10 & -20 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de $g'((50, 0))$ são -10 e 25 , observamos que $(50, 0)$ é um ponto crítico instável. Na verdade, $(50, 0)$ é um ponto de sela.

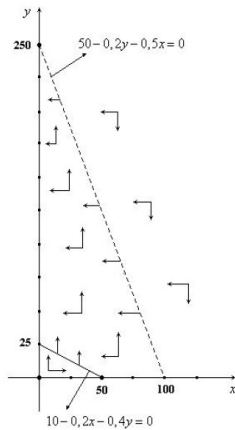
Finalmente, notemos que

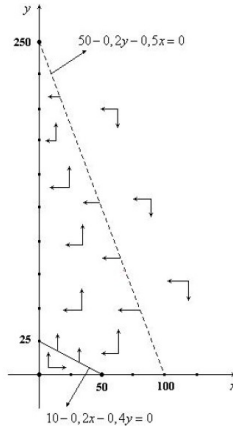
$$g'((0, 250)) = \begin{pmatrix} -90 & 0 \\ -125 & -50 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, notemos que

$$g'((0, 250)) = \begin{pmatrix} -90 & 0 \\ -125 & -50 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de $g'((0, 250))$ são -50 e -90 , observamos que $(0, 250)$ é um ponto crítico assintoticamente estável.

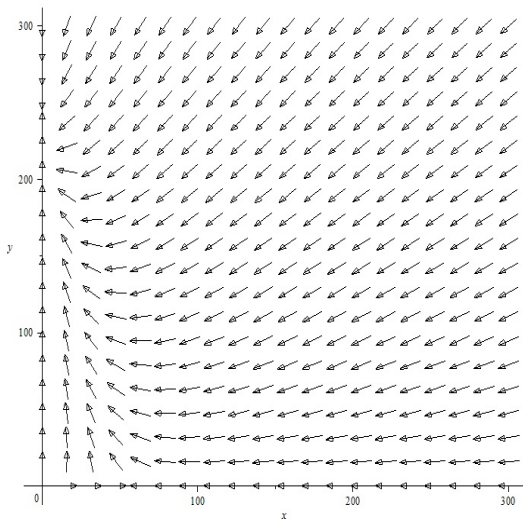




Percebe-se, de forma clara, que à medida que t é muito grande, x se aproxima de zero e y “caminha em direção” a 250. Tal proposta nos alega que a população da espécie A tende a ser extinta do lago, enquanto, a população da espécie B deve se estabilizar por volta de 250 indivíduos por m^3 de água.

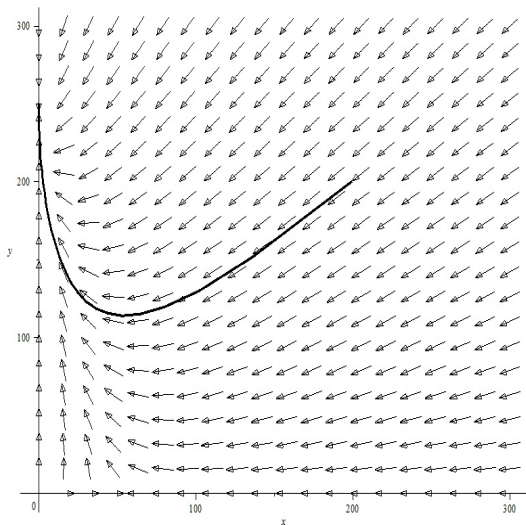
Plano de fase determinado pelo sistema autônomo em questão.

Plano de fase determinado pelo sistema autônomo em questão.



Consideremos que $(x(0), y(0)) = (200, 200)$.

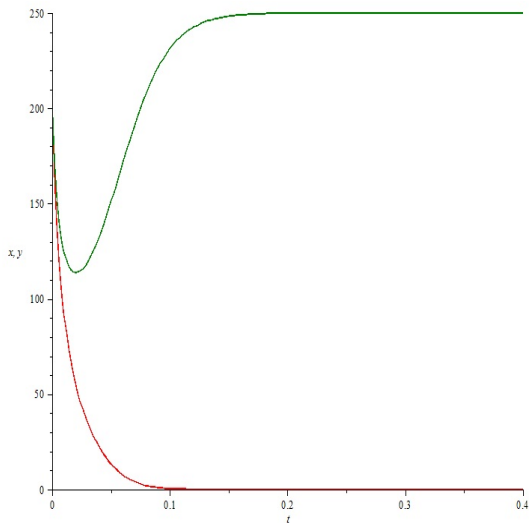
Consideremos que $(x(0), y(0)) = (200, 200)$.



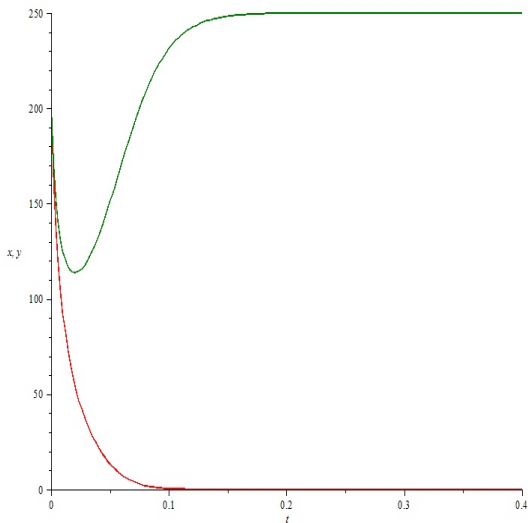
A população de $x(t)$ está em vermelho.

A população de $x(t)$ está em vermelho. A população $y(t)$ está em verde.

A população de $x(t)$ está em vermelho. A população $y(t)$ está em verde.

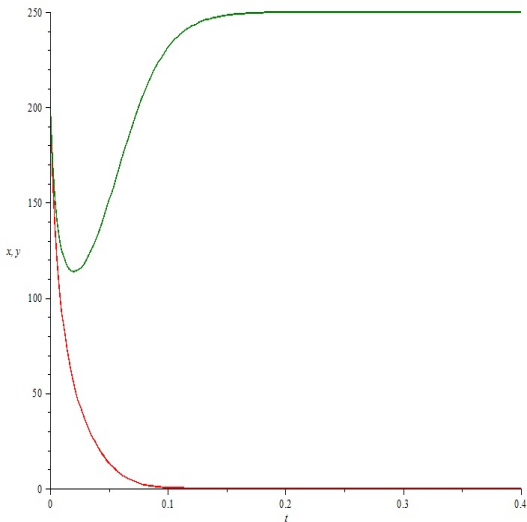


A população de $x(t)$ está em vermelho. A população $y(t)$ está em verde.



$x(t)$ tende à extinção.

A população de $x(t)$ está em vermelho. A população $y(t)$ está em verde.



$x(t)$ tende à extinção. $y(t)$ se estabiliza em 250 indivíduos por m^2 .

MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

Suponhamos duas espécies: A e B .

MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

Suponhamos duas espécies: A e B . Vivendo em um ambiente isolado, A se alimenta quase que exclusivamente de B . B , entretanto, sobrevive através de outra fonte alimentar.

MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

Suponhamos duas espécies: A e B . Vivendo em um ambiente isolado, A se alimenta quase que exclusivamente de B . B , entretanto, sobrevive através de outra fonte alimentar.

Consideremos $x(t)$ a população da espécie A , que neste contexto é a predadora.

MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

Suponhamos duas espécies: A e B . Vivendo em um ambiente isolado, A se alimenta quase que exclusivamente de B . B , entretanto, sobrevive através de outra fonte alimentar.

Consideremos $x(t)$ a população da espécie A , que neste contexto é a predadora. $y(t)$ será a população da espécie B , a presa.

MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

Suponhamos duas espécies: A e B . Vivendo em um ambiente isolado, A se alimenta quase que exclusivamente de B . B , entretanto, sobrevive através de outra fonte alimentar.

Consideremos $x(t)$ a população da espécie A , que neste contexto é a predadora. $y(t)$ será a população da espécie B , a presa. Interpretamos que o número de indivíduos de A e B varia conforme o tempo t , esta última uma variável maior ou igual a zero.

MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

Suponhamos duas espécies: A e B . Vivendo em um ambiente isolado, A se alimenta quase que exclusivamente de B . B , entretanto, sobrevive através de outra fonte alimentar.

Consideremos $x(t)$ a população da espécie A , que neste contexto é a predadora. $y(t)$ será a população da espécie B , a presa. Interpretamos que o número de indivíduos de A e B varia conforme o tempo t , esta última uma variável maior ou igual a zero.

Os cientistas Lotka e Volterra, a partir desta compreensão, desenvolveram um modelo que pretende entender o que ocorre com os valores de $x(t)$ e $y(t)$, a partir da interação definida.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce indefinidamente, numa taxa proporcional ao seu tamanho.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce indefinidamente, numa taxa proporcional ao seu tamanho. Deste modo, $y'(t) = d \cdot y(t)$, onde $d > 0$ e $x(t) = 0$, para todo $t > 0$.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce indefinidamente, numa taxa proporcional ao seu tamanho. Deste modo, $y'(t) = d \cdot y(t)$, onde $d > 0$ e $x(t) = 0$, para todo $t > 0$.
- Na ausência da presa, o predador “morre” e $x(t)$ decai.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce indefinidamente, numa taxa proporcional ao seu tamanho. Deste modo, $y'(t) = d \cdot y(t)$, onde $d > 0$ e $x(t) = 0$, para todo $t > 0$.
- Na ausência da presa, o predador “morre” e $x(t)$ decai. Assim, $x'(t) = -a \cdot x(t)$, onde $a > 0$ e $y(t) = 0$, para todo $t > 0$.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce indefinidamente, numa taxa proporcional ao seu tamanho. Deste modo, $y'(t) = d \cdot y(t)$, onde $d > 0$ e $x(t) = 0$, para todo $t > 0$.
- Na ausência da presa, o predador “morre” e $x(t)$ decai. Assim, $x'(t) = -a \cdot x(t)$, onde $a > 0$ e $y(t) = 0$, para todo $t > 0$.
- O aumento no número de predadores é inteiramente dependente do suprimento alimentar (presas) existente e as presas são consumidas numa taxa proporcional ao número de encontros entre presa e predador.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce indefinidamente, numa taxa proporcional ao seu tamanho. Deste modo, $y'(t) = d \cdot y(t)$, onde $d > 0$ e $x(t) = 0$, para todo $t > 0$.
- Na ausência da presa, o predador “morre” e $x(t)$ decai. Assim, $x'(t) = -a \cdot x(t)$, onde $a > 0$ e $y(t) = 0$, para todo $t > 0$.
- O aumento no número de predadores é inteiramente dependente do suprimento alimentar (presas) existente e as presas são consumidas numa taxa proporcional ao número de encontros entre presa e predador. Tais encontros diminuem o número de presas e aumentam o número de predadores.

Considerando $\frac{dx}{dt}$ a taxa de crescimento de $x(t)$ e $\frac{dy}{dt}$ a taxa de crescimento de $y(t)$, o modelo de interação presa-predador de Lotka-Volterra pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by). \\ \frac{dy}{dt} &= -cxy + dy = y(-cx + d).\end{aligned}$$

Considerando $\frac{dx}{dt}$ a taxa de crescimento de $x(t)$ e $\frac{dy}{dt}$ a taxa de crescimento de $y(t)$, o modelo de interação presa-predador de Lotka-Volterra pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by). \\ \frac{dy}{dt} &= -cxy + dy = y(-cx + d).\end{aligned}$$

Considerando $c > 0$, temos que o termo $-cxy$ representa a taxa de diminuição de y devido à predação por A .

Considerando $\frac{dx}{dt}$ a taxa de crescimento de $x(t)$ e $\frac{dy}{dt}$ a taxa de crescimento de $y(t)$, o modelo de interação presa-predador de Lotka-Volterra pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by). \\ \frac{dy}{dt} &= -cxy + dy = y(-cx + d).\end{aligned}$$

Considerando $c > 0$, temos que o termo $-cxy$ representa a taxa de diminuição de y devido à predação por A . Considerando $b > 0$, temos que o termo bxy representa a contribuição positiva resultante para população de predadores devido à predação da outra espécie.

Considerando $\frac{dx}{dt}$ a taxa de crescimento de $x(t)$ e $\frac{dy}{dt}$ a taxa de crescimento de $y(t)$, o modelo de interação presa-predador de Lotka-Volterra pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by). \\ \frac{dy}{dt} &= -cxy + dy = y(-cx + d).\end{aligned}$$

Considerando $c > 0$, temos que o termo $-cxy$ representa a taxa de diminuição de y devido à predação por A . Considerando $b > 0$, temos que o termo bxy representa a contribuição positiva resultante para população de predadores devido à predação da outra espécie. Quanto maior o produto de x e y , maior será a predação de B por parte de A .

Podemos perceber que o sistema proposto é autônomo plano não-linear.

Considerando $\frac{dx}{dt}$ a taxa de crescimento de $x(t)$ e $\frac{dy}{dt}$ a taxa de crescimento de $y(t)$, o modelo de interação presa-predador de Lotka-Volterra pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by). \\ \frac{dy}{dt} &= -cxy + dy = y(-cx + d).\end{aligned}$$

Considerando $c > 0$, temos que o termo $-cxy$ representa a taxa de diminuição de y devido à predação por A . Considerando $b > 0$, temos que o termo bxy representa a contribuição positiva resultante para população de predadores devido à predação da outra espécie. Quanto maior o produto de x e y , maior será a predação de B por parte de A .

Podemos perceber que o sistema proposto é autônomo plano não-linear. Seus pontos críticos são, contudo, $(0, 0)$ e $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Seja a matriz jacobiana

$$g'((x, y)) = \begin{pmatrix} -a + by & bx \\ -cy & -cx + d \end{pmatrix}.$$

Seja a matriz jacobiana

$$g'((x, y)) = \begin{pmatrix} -a + by & bx \\ -cy & -cx + d \end{pmatrix}.$$

Como

$$g'((0, 0)) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

a matriz $g'((0, 0))$ tem os números $-a$ e d como autovalores.

Seja a matriz jacobiana

$$g'((x, y)) = \begin{pmatrix} -a + by & bx \\ -cy & -cx + d \end{pmatrix}.$$

Como

$$g'((0, 0)) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

a matriz $g'((0, 0))$ tem os números $-a$ e d como autovalores. Pela caracterização $(0, 0)$ é um ponto crítico instável para o sistema.

Seja a matriz jacobiana

$$g'((x, y)) = \begin{pmatrix} -a + by & bx \\ -cy & -cx + d \end{pmatrix}.$$

Como

$$g'((0, 0)) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

a matriz $g'((0, 0))$ tem os números $-a$ e d como autovalores. Pela caracterização $(0, 0)$ é um ponto crítico instável para o sistema. Em verdade, $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Como

$$g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

a matriz $g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right)$ tem os números imaginários puros $-i\sqrt{ad}$ e $i\sqrt{ad}$ como autovalores.

Como

$$g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

a matriz $g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right)$ tem os números imaginários puros $-i\sqrt{ad}$ e $i\sqrt{ad}$ como autovalores. Pela caracterização, este ponto crítico poderá ser um centro, uma espiral estável ou uma espiral instável.

Como

$$g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

a matriz $g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right)$ tem os números imaginários puros $-i\sqrt{ad}$ e $i\sqrt{ad}$ como autovalores. Pela caracterização, este ponto crítico poderá ser um centro, uma espiral estável ou uma espiral instável.

Notemos que

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)}.$$

Como

$$g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

a matriz $g' \left(\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right)$ tem os números imaginários puros $-i\sqrt{ad}$ e $i\sqrt{ad}$ como autovalores. Pela caracterização, este ponto crítico poderá ser um centro, uma espiral estável ou uma espiral instável.

Notemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)}.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a + by}{y} dy = \int \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a + by}{y} dy = \int \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\Rightarrow -a \ln(y) + by = -cx + d \ln(x) + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a + by}{y} dy = \int \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\Rightarrow -a \ln(y) + by = -cx + d \ln(x) + c_1$$

$$\Rightarrow a \ln(y) + a \ln(x) + k \ln(x) = by + cx - c_1,$$

onde $k = d - a$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a + by}{y} dy = \int \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\Rightarrow -a \ln(y) + by = -cx + d \ln(x) + c_1$$

$$\Rightarrow a \ln(y) + a \ln(x) + k \ln(x) = by + cx - c_1,$$

onde $k = d - a$.

$$\Rightarrow \ln(x^a y^a) + \ln(x^k) = by + cx - c_1 \Rightarrow e^{\ln(x^a y^a) + \ln(x^k)} = e^{by + cx - c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a + by}{y} dy = \int \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\Rightarrow -a \ln(y) + by = -cx + d \ln(x) + c_1$$

$$\Rightarrow a \ln(y) + a \ln(x) + k \ln(x) = by + cx - c_1,$$

onde $k = d - a$.

$$\Rightarrow \ln(x^a y^a) + \ln(x^k) = by + cx - c_1 \Rightarrow e^{\ln(x^a y^a) + \ln(x^k)} = e^{by + cx - c_1}$$

$$\Rightarrow x^d y^a = e^{by} e^{cx} e^{-c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)} \Rightarrow x(-a + by)dy = y(-cx + d)$$

$$\Rightarrow \frac{-a + by}{y} dy = \frac{-cx + d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a + by}{y} dy = \int \frac{-cx + d}{x} dx$$

$$\Rightarrow -a \ln(y) + by = -cx + d \ln(x) + c_1$$

$$\Rightarrow a \ln(y) + a \ln(x) + k \ln(x) = by + cx - c_1,$$

onde $k = d - a$.

$$\Rightarrow \ln(x^a y^a) + \ln(x^k) = by + cx - c_1 \Rightarrow e^{\ln(x^a y^a) + \ln(x^k)} = e^{by + cx - c_1}$$

$$\Rightarrow x^d y^a = e^{by} e^{cx} e^{-c_1} \Rightarrow x^d y^a e^{-cx} e^{-by} = c_0.$$

Infelizmente, não conseguimos resolver a dada equação explicitamente para y em termos de x ou para x em termos de y . Pode-se demonstrar, entretanto, que a equação $x^d y^a e^{-cx} e^{-by} = c_0$ caracteriza uma curva fechada que “circunda” o ponto crítico $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Infelizmente, não conseguimos resolver a dada equação explicitamente para y em termos de x ou para x em termos de y . Pode-se demonstrar, entretanto, que a equação $x^d y^a e^{-cx} e^{-by} = c_0$ caracteriza uma curva fechada que “circunda” o ponto crítico $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. Tal curva pode não caracterizar uma elipse, mas de qualquer forma, $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ representa um centro.

Infelizmente, não conseguimos resolver a dada equação explicitamente para y em termos de x ou para x em termos de y . Pode-se demonstrar, entretanto, que a equação $x^d y^a e^{-cx} e^{-by} = c_0$ caracteriza uma curva fechada que “circunda” o ponto crítico $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. Tal curva pode não caracterizar uma elipse, mas de qualquer forma, $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ representa um centro.

Consideremos (x_0, y_0) , o número de habitantes para A e B , respectivamente, no instante $t = 0$.

Infelizmente, não conseguimos resolver a dada equação explicitamente para y em termos de x ou para x em termos de y . Pode-se demonstrar, entretanto, que a equação $x^d y^a e^{-cx} e^{-by} = c_0$ caracteriza uma curva fechada que “circunda” o ponto crítico $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. Tal curva pode não caracterizar uma elipse, mas de qualquer forma, $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ representa um centro.

Consideremos (x_0, y_0) , o número de habitantes para A e B , respectivamente, no instante $t = 0$. Se $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ e $(x_0, y_0) \neq \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$, observamos que o número de predadores e presas variará ciclicamente em volta de $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$, evidentemente não se anulando e voltando ao patamar de (x_0, y_0) após um período de tempo p .

Problema: Coelhos e lobos vivem em uma região X do planeta Terra. Nesta região, os coelhos são as únicas fontes de alimento para os lobos. Os coelhos, entretanto, alimentam-se de vegetação (sempre abundante em X). Consideremos $y(t)$ a população de lobos. $x(t)$ será a população de coelhos conforme o tempo t , $t \geq 0$.

Problema: Coelhos e lobos vivem em uma região X do planeta Terra. Nesta região, os coelhos são as únicas fontes de alimento para os lobos. Os coelhos, entretanto, alimentam-se de vegetação (sempre abundante em X). Consideremos $y(t)$ a população de lobos. $x(t)$ será a população de coelhos conforme o tempo t , $t \geq 0$. Suponhamos que o crescimento (ou decrescimento) das populações de coelhos e lobos esteja descrito aproximado pelas seguintes equações de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = 0,08x - 0,001xy = x(0,08 - 0,001y)$$

Problema: Coelhos e lobos vivem em uma região X do planeta Terra. Nesta região, os coelhos são as únicas fontes de alimento para os lobos. Os coelhos, entretanto, alimentam-se de vegetação (sempre abundante em X). Consideremos $y(t)$ a população de lobos. $x(t)$ será a população de coelhos conforme o tempo t , $t \geq 0$. Suponhamos que o crescimento (ou decrescimento) das populações de coelhos e lobos esteja descrito aproximado pelas seguintes equações de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = 0,08x - 0,001xy = x(0,08 - 0,001y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,02y + 0,00002xy = y(-0,02 + 0,00002x).$$

Problema: Coelhos e lobos vivem em uma região X do planeta Terra. Nesta região, os coelhos são as únicas fontes de alimento para os lobos. Os coelhos, entretanto, alimentam-se de vegetação (sempre abundante em X). Consideremos $y(t)$ a população de lobos. $x(t)$ será a população de coelhos conforme o tempo t , $t \geq 0$. Suponhamos que o crescimento (ou decrescimento) das populações de coelhos e lobos esteja descrito aproximado pelas seguintes equações de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = 0,08x - 0,001xy = x(0,08 - 0,001y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,02y + 0,00002xy = y(-0,02 + 0,00002x).$$

Sabendo que $x(0) = 1000$ e $y(0) = 40$, o que esperar dos valores $x(t)$ e $y(t)$ com a variação positiva de t ?

Observamos que $(0, 0)$ e $(1000, 80)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

Observamos que $(0, 0)$ e $(1000, 80)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

$(0, 0)$ é um ponto de sela.

Observamos que $(0, 0)$ e $(1000, 80)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

$(0, 0)$ é um ponto de sela. $(1000, 80)$ é um ponto de centro.

Observamos que $(0, 0)$ e $(1000, 80)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

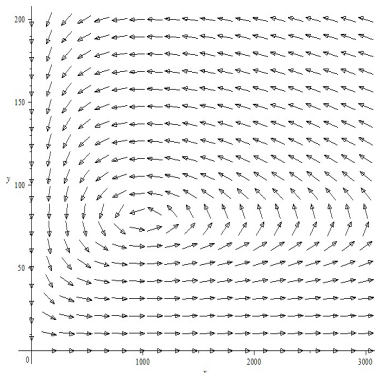
$(0, 0)$ é um ponto de sela. $(1000, 80)$ é um ponto de centro.

Abaixo, o comportamento gráfico do plano de fase.

Observamos que $(0, 0)$ e $(1000, 80)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

$(0, 0)$ é um ponto de sela. $(1000, 80)$ é um ponto de centro.

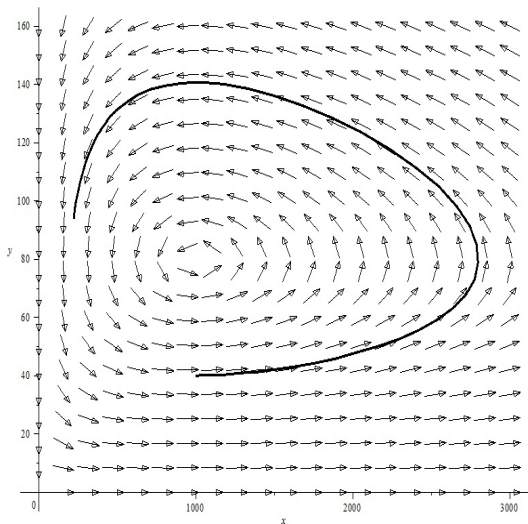
Abaixo, o comportamento gráfico do plano de fase.

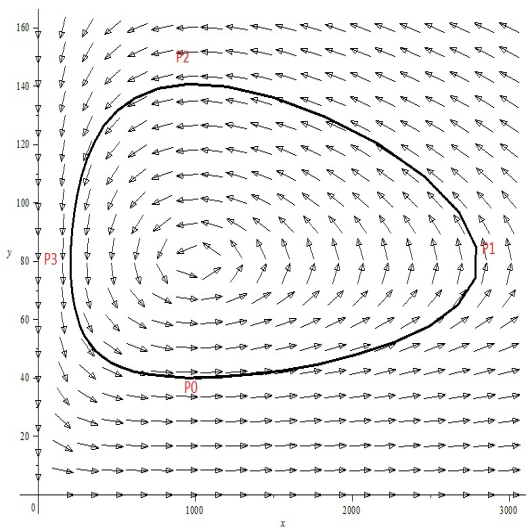


Consideremos que $(x(0), y(0)) = (1000, 40)$.

Consideremos que $(x(0), y(0)) = (1000, 40)$. O tempo está variando de $t = 0$ a $t = 100$.

Consideremos que $(x(0), y(0)) = (1000, 40)$. O tempo está variando de $t = 0$ a $t = 100$.



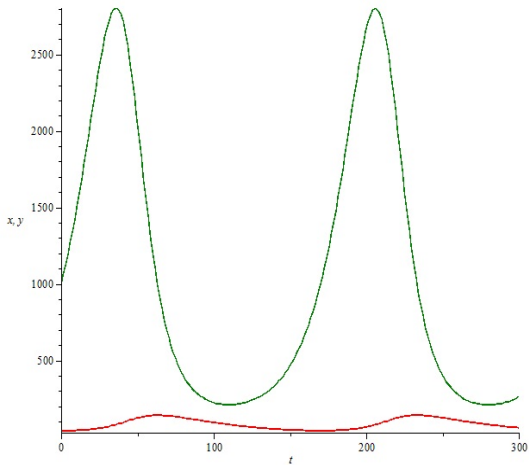


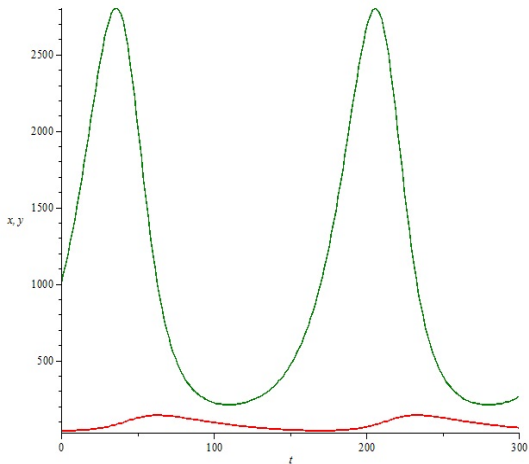
Interpretamos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; assim, a população de coelhos aumentará. O aumento da população de coelhos causará aumento da oferta de alimentos para os lobos. Os lobos bem alimentados se reproduzirão, aumentando também o tamanho de sua população. Quanto maior a quantidade de lobos, mais frequentes serão os encontros entre lobos e coelhos. Tendo dificuldades para fugir dos lobos, os coelhos se tornarão presas fáceis e após um espaço de tempo t_1 , esta população começará a diminuir.

Interpretamos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; assim, a população de coelhos aumentará. O aumento da população de coelhos causará aumento da oferta de alimentos para os lobos. Os lobos bem alimentados se reproduzirão, aumentando também o tamanho de sua população. Quanto maior a quantidade de lobos, mais frequentes serão os encontros entre lobos e coelhos. Tendo dificuldades para fugir dos lobos, os coelhos se tornarão presas fáceis e após um espaço de tempo t_1 , esta população começará a diminuir. Na figura, observamos que a população de coelhos começará a diminuir em P_1 , quando $x(t)$ admitirá valor máximo, por volta de 2800 indivíduos.

Interpretamos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; assim, a população de coelhos aumentará. O aumento da população de coelhos causará aumento da oferta de alimentos para os lobos. Os lobos bem alimentados se reproduzirão, aumentando também o tamanho de sua população. Quanto maior a quantidade de lobos, mais frequentes serão os encontros entre lobos e coelhos. Tendo dificuldades para fugir dos lobos, os coelhos se tornarão presas fáceis e após um espaço de tempo t_1 , esta população começará a diminuir. Na figura, observamos que a população de coelhos começará a diminuir em P_1 , quanto $x(t)$ admitirá valor máximo, por volta de 2800 indivíduos.

Algum tempo t_2 depois, com a diminuição brusca da quantidade de coelhos, a população de lobos também diminuirá, por ausência de alimentos. Caracteriza-se este evento em P_2 , onde a população de lobos é aproximada em 140 indivíduos e a população de coelhos equivalerá a valor próximo a 1000.





A população de coelhos está mostrada em verde. A população de lobos em vermelho.

Problema: Ratos e corujas são mantidos em um ambiente experimental. Nas condições deste ambiente, os ratos têm alimento em abundância. As corujas, por sua vez, têm nos ratos a única fonte de alimento. Neste contexto, as corujas são as predadoras e os ratos as presas. Sabe-se ainda, que o crescimento excessivo do número de ratos promove aumento excessivo de resíduos por parte desta população e este fator junto as limitações de espaço caracterizam a queda do crescimento populacional destes indivíduos, sendo julgada, portanto, uma determinada capacidade suporte para população roedora.

Considerando $R(t)$ a população de ratos no dado ambiente conforme o tempo t e $W(t)$ a população de corujas neste mesmo contexto, cientistas conseguem verificar que as taxas de crescimento destas populações são dadas conforme as seguintes equações:

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

Considerando $R(t)$ a população de ratos no dado ambiente conforme o tempo t e $W(t)$ a população de corujas neste mesmo contexto, cientistas conseguem verificar que as taxas de crescimento destas populações são dadas conforme as seguintes equações:

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

Com base nestas informações,

Considerando $R(t)$ a população de ratos no dado ambiente conforme o tempo t e $W(t)$ a população de corujas neste mesmo contexto, cientistas conseguem verificar que as taxas de crescimento destas populações são dadas conforme as seguintes equações:

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

Com base nestas informações,

- (a) Se inicialmente existissem apenas ratos, o que esperaríamos para o número destes quando t for um valor bastante grande?

Considerando $R(t)$ a população de ratos no dado ambiente conforme o tempo t e $W(t)$ a população de corujas neste mesmo contexto, cientistas conseguem verificar que as taxas de crescimento destas populações são dadas conforme as seguintes equações:

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

Com base nestas informações,

- (a) Se inicialmente existissem apenas ratos, o que esperaríamos para o número destes quando t for um valor bastante grande?
- (b) Supondo que a população inicial de ratos seja 1000 e a população de corujas 40, o que esperar destas populações com o variar do tempo?

a. Consideremos que, inicialmente, não existam corujas. Portanto, no tempo $t = 0$, temos que $W = 0$. Na verdade, para qualquer $t \geq 0$, a população de corujas será nula, pois, pensando em crescimento natural, a chegada de novas corujas ao ambiente depende exclusivamente da existência prévia de outras. Portanto, podemos verificar que o crescimento de ratos será regido pela equação

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R(1 - 0,0002R).$$

a. Consideremos que, inicialmente, não existam corujas. Portanto, no tempo $t = 0$, temos que $W = 0$. Na verdade, para qualquer $t \geq 0$, a população de corujas será nula, pois, pensando em crescimento natural, a chegada de novas corujas ao ambiente depende exclusivamente da existência prévia de outras. Portanto, podemos verificar que o crescimento de ratos será regido pela equação

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R(1 - 0,0002R).$$

Notemos que

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R \left(1 - \frac{R}{5000} \right).$$

a. Consideremos que, inicialmente, não existam corujas. Portanto, no tempo $t = 0$, temos que $W = 0$. Na verdade, para qualquer $t \geq 0$, a população de corujas será nula, pois, pensando em crescimento natural, a chegada de novas corujas ao ambiente depende exclusivamente da existência prévia de outras. Portanto, podemos verificar que o crescimento de ratos será regido pela equação

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R(1 - 0,0002R).$$

Notemos que

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R \left(1 - \frac{R}{5000} \right).$$

Segundo tal equação, a população de ratos, na ausência de corujas, se estabilizará em 5000 indivíduos.

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

É fácil verificar que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os pontos críticos deste sistema.

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

É fácil verificar que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os pontos críticos deste sistema.

- $(0, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

É fácil verificar que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os pontos críticos deste sistema.

- $(0, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(5000, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

É fácil verificar que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os pontos críticos deste sistema.

- $(0, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(5000, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(1000, 64)$ é um ponto crítico estável (ponto espiral estável).

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

É fácil verificar que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os pontos críticos deste sistema.

- $(0, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(5000, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(1000, 64)$ é um ponto crítico estável (ponto espiral estável).

Como $(R(0), W(0)) = (1000, 40)$ é de se esperar que, com o passar do tempo, o número de ratos se estabilize em 1000 indivíduos.

b. Consideremos o sistema

$$\frac{dR}{dt} = -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R)$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,02W + 0,00002RW,$$

É fácil verificar que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os pontos críticos deste sistema.

- $(0, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(5000, 0)$ é um ponto crítico instável (ponto de sela).
- $(1000, 64)$ é um ponto crítico estável (ponto espiral estável).

Como $(R(0), W(0)) = (1000, 40)$ é de se esperar que, com o passar do tempo, o número de ratos se estabilize em 1000 indivíduos. Já, a população de corujas, deve se estabilizar em 64 (sessenta e quatro) aves.

Observamos que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

Observamos que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

$(1000, 64)$ é um ponto espiral estável.

Observamos que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

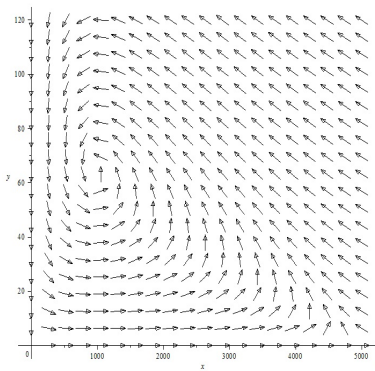
$(1000, 64)$ é um ponto espiral estável.

Abaixo, o comportamento gráfico do plano de fase.

Observamos que $(0, 0)$, $(5000, 0)$ e $(1000, 64)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

$(1000, 64)$ é um ponto espiral estável.

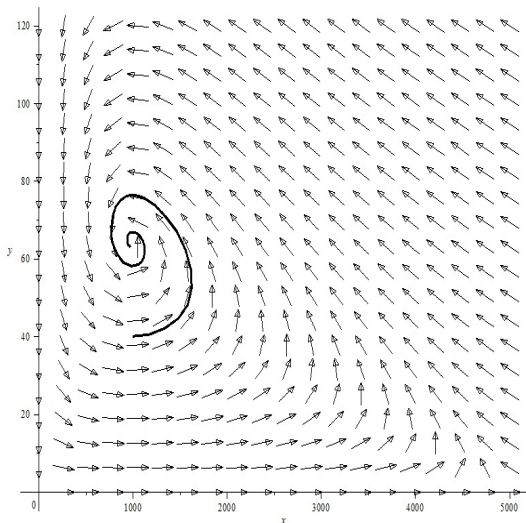
Abaixo, o comportamento gráfico do plano de fase.

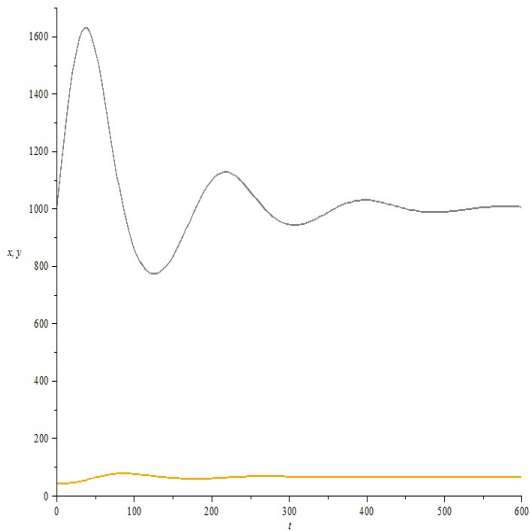


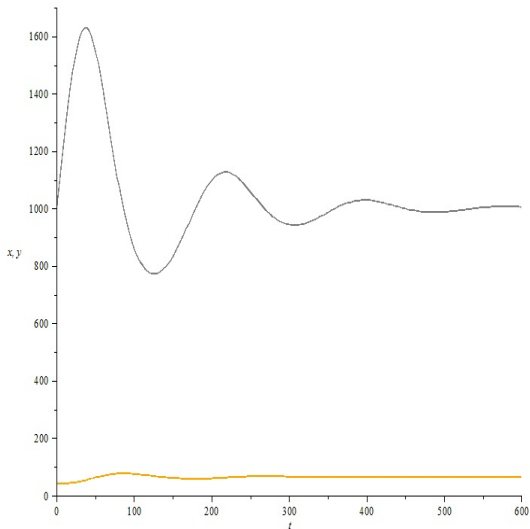
Consideremos que $(R(0), W(0)) = (1000, 40)$.

Consideremos que $(R(0), W(0)) = (1000, 40)$. O tempo está variando de $t = 0$ a $t = 600$.

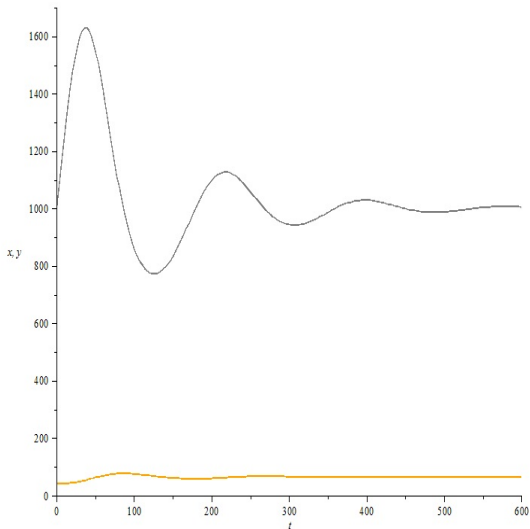
Consideremos que $(R(0), W(0)) = (1000, 40)$. O tempo está variando de $t = 0$ a $t = 600$.







O número de ratos está destacado em cinza.



O número de ratos está destacado em cinza. O número de corujas está destacado em laranja.



ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.



BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução Antonio Carlos Campos de Carvalho e Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1990.



CULLEN, M. R.; ZILL, D. G. **Equações diferenciais, volume I**. Tradução Antonio Zumpano. 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2001.



CULLEN, M. R.; ZILL, D. G. **Equações diferenciais, volume II**. Tradução Alfredo Alves de Farias. 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2001.



PAULINO, R. P. **Biologia, volume único**. 7ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2001.



STEWART, J. **Cálculo, volume II**. 4ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

MUITO OBRIGADO!